

ISSN 0579–9368



НАУЧНЫЙ  
ЖУРНАЛ

*Основан  
в 1946 году*

# Вестник Московского университета

---

---

*Серия 1*

МАТЕМАТИКА  
МЕХАНИКА

6/2019

# Вестник Московского университета

Серия 1 МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Издательство Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

№ 6 · 2019 · ноябрь – декабрь

Выходит один раз в два месяца

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- Беднов Б. Б.* О множестве точек Штейнера четырех элементов в пространстве Линденштраусса . . . . . 3
- Мамон С. В.* Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на группе Гейзенберга и интеграл Винера . . . . . 8
- Фоменко Т. Н.* Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах . . . . . 14
- Владыкина В. Е.* Спектральные характеристики оператора Штурма–Лиувилля при минимальных условиях на гладкость коэффициентов . . . . . 23

### Механика

- Шамолин М. В.* Интегрируемые системы со многими степенями свободы с диссипацией . . . . . 29
- Романова Д. И., Душин В. Р., Никитин В. Ф.* Вытеснение нефти смесью газов и воды с тепловыделением . . . . . 38
- Бровко Г. Л.* Об инерциальных системах отсчета для подсистем деформируемых тел . . . . . 44

### Краткие сообщения

- Сысоева Л. Н.* Квазиуниверсальный булев автомат с четырьмя константными состояниями . . . . . 51
- Духновский С. А.* Об асимптотической устойчивости состояний равновесия для систем уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина . . . . . 55
- Болдин М. В.* О локальной мощности критериев типа Колмогорова и омега-квадрат в авторегрессии . . . . . 58
- Лисеев М. Ю.* Сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми тар-морфизмами . . . . . 61
- Латонов В. В.* Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования . . . . . 64
- Указатель статей и материалов, опубликованных в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика” в 2019 году . . . . . 69*

## CONTENTS

### *Mathematics*

<i>Bednov B. B.</i> On the set of Steiner points of four elements in the Lindenstrauss space . . . . .	3
<i>Mamon S. V.</i> Solution to the Cauchy problem for the heat equation on the Heisenberg group and the Wiener integral . . . . .	8
<i>Fomenko T. N.</i> Searching for zeros of functionals, fixed points and mapping coincidence in quasi-metric spaces	14
<i>Vladykina V. E.</i> Spectral characteristics of the Sturm–Liouville operator under minimal restrictions on smoothness of coefficients . . . . .	23

### *Mechanics*

<i>Shamolin M. V.</i> Integrable systems with many degrees of freedom and with dissipation . . . . .	29
<i>Romanova D. I., Dushin V. R., and Nikitin V. F.</i> Oil displacement by water–gas mixtures with heat release	38
<i>Brovko G. L.</i> Inertial reference frames for subsystems of deformable bodies . . . . .	44

### *Short notes*

<i>Sysoeva L. N.</i> Quasi-universal Boolean automaton with four constant states . . . . .	51
<i>Dukhnovskii S. A.</i> Asymptotic stability of equilibrium states for the Carleman and Godunov–Sultangazin systems of equations . . . . .	55
<i>Boldin M. V.</i> Local cardinality of Kolmogorov type and omega-square criteria in autoregression . . . . .	58
<i>Liseev M. Yu.</i> Preservation of properties of normality type mappings by closed map-morphisms . . . . .	61
<i>Latonov V. V.</i> Minimax optimization for a system of line-of-sight stabilization . . . . .	64
<i>Index of papers and materials published in the journal “Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika” during 2019 year</i> . . . . .	69

To buy separate issues of “Moscow University Mathematics Bulletin” and “Moscow University Mechanics Bulletin” or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.  
250 West 57th Street,  
New York, USA, NY 10107.  
Fax: 646-424-96-95

## Математика

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА ЧЕТЫРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНДЕНШТРАУССАБ. Б. Беднов<sup>1</sup>

Исследуется связь множества точек Штейнера четырехэлементного множества с множеством точек Штейнера трехэлементного подмножества в предуальных к  $L_1$  пространствах. Предъявлена липшицева выборка из отображения, сопоставляющего четверке непрерывных на хаусдорфовом компакте функций их множество точек Штейнера.

*Ключевые слова:* банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка.

We study the connection between the set of Steiner points for a four-element set and the set of Steiner points for a three-element subset in  $L_1$ -predual spaces. A Lipschitz selection is presented for the mapping from fours of continuous functions on a Hausdorff compact set to the set of their Steiner points.

*Key words:* Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection.

Пусть  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово пространство. Для заданного набора  $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$  множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан)  $\text{st}(M_n)$  состоит из таких точек  $s \in X$ , для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\text{st}|(M_n).$$

Пусть  $n \geq 3$  — натуральное число. Говорят, что банахово пространство  $X$  обладает свойством п.2.1.P. (п.2 Intersection Property [1]), если всякие  $n$  попарно пересекающихся замкнутых шаров в  $X$  имеют непустое пересечение.

**Теорема А** (А. Гротендик [2], Й. Линденштраусс [3], см. также [1]). *Для действительного банахова пространства  $X$  следующие свойства эквивалентны:*

- (1)  $X$  обладает свойством п.2.1.P. для всякого  $n \geq 3$ ;
- (2)  $X$  обладает свойством 4.2.1.P.;
- (3)  $X^*$  изометрически изоморфно  $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$  для некоторого множества  $E$ , некоторой  $\sigma$ -алгебры  $\Sigma$  подмножеств  $E$  и некоторой  $\sigma$ -аддитивной меры  $\mu$ , определенной на  $\Sigma$ ;
- (4)  $X^{**}$  1-дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве  $Z$  (т.е. существует линейный проектор  $P : Z \rightarrow X^{**}$  нормы 1).

Пространства, удовлетворяющие условиям теоремы А, называются предуальными к  $L_1$  или пространствами Линденштраусса. К этому классу пространств относятся все пространства  $C[K]$  действительных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте  $K$ , пространства  $c_0(E)$ ,  $l_\infty$  и многие другие.

В предуальном к  $L_1$  пространстве множество точек Штейнера  $\text{st}(M_n)$  непусто [4] для произвольного множества  $M_n \subset X$ , а само множество  $\text{st}(M_n)$  можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (метрический отрезок с концами  $a$  и  $b$  в банаховом пространстве  $X$  есть множество  $m[a, b] = \{x \in X : \|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|\}$ ). Точнее, верна

**Теорема В** [5]. *Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1$ . Для множества  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  из  $X$  имеет место формула*

$$|\text{st}|(M) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^k L(N_j) : N_1 \cup \dots \cup N_k = M \right\},$$

<sup>1</sup>Беднов Борислав Борисович — канд. физ.-мат. наук, переводчик-секретарь каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; доцент каф. ФН-12 “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана; доцент каф. высшей математики, механики и математического моделирования Сеченов. ун-та, e-mail: noriiii@inbox.ru.

Bednov Borislav Borisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, translator-referent, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Associated Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Fundamental Sciences-12 “Mathematical Modeling”; Associated Professor, Sechenov University, Chair of Higher Mathematics, Mechanics and Mathematical Modeling.

где максимум берется по всем не менее чем двухточечным подмножествам  $N_j \subset M$ , причем если точка  $x_i$  имеет кратность  $p_i$  в множестве  $M$ , то  $x_i$  содержится в  $p_i$  различных множествах из  $\{N_j\}_{j=1}^k$ . Число  $L(N_j)$  обозначает максимальную сумму длин ребер цикла, обходящего все вершины из  $N_j$  по одному разу. При этом

$$\text{st}(M) = \bigcap_{j=1}^k \text{st}(N_j^*) = \bigcap m[x_p, x_q], \quad (1)$$

где  $\{N_j^*\}_{j=1}^k$  — такие не менее чем двухточечные подмножества множества  $M$ , для которых  $\sum_{j=1}^k L(N_j^*) = 2|\text{st}(M)|$ , а последнее пересечение берется по тем парам индексов  $p, q$ , для которых  $x_p, x_q \in N_j^*$  соединены ребром в цикле с длиной  $L(N_j^*)$ , обходящем множество  $N_j^*$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Заметим, что для двухточечного множества  $N_j$  цикл состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

Можно считать [5], что множества  $N_j$  из теоремы В — элементы разбиения множества  $M$  — состоят либо из нечетного количества точек, либо всего из двух. Поэтому для четырехточечного множества  $M_4$  разбиение  $\{N_j\}$  состоит из пары двухэлементных подмножеств.

**Следствие 1.** Пусть пространство  $X$  преддуально к  $L_1$ ,  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ . Тогда

$$|\text{st}(M_4) = \max\{\|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\|, \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_4\|, \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|\} =: \max(M_4).$$

Если  $\max(M_4) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$ , то экстремальное разбиение  $\{N_j^*\}$  множества  $M_4$  (возможно, не единственное) состоит из  $\{x_1, x_4\}$  и  $\{x_2, x_3\}$ , при этом  $\text{st}(M_4) = m[x_1, x_4] \cap m[x_2, x_3]$ .

Если экстремальное разбиение множества  $M$  не содержит двухэлементных множеств, то, используя первое равенство формулы (1), можно однозначно вычислить расстояния от каждого элемента множества  $M$  до (произвольной) точки  $s \in \text{st}(M)$  при помощи леммы 8 работы [5]. Если же экстремальное разбиение множества  $M$  содержит двухэлементное множество  $\{x, y\}$ , то, вообще говоря, расстояние  $\|x - s\|$  определено неоднозначно при  $s \in \text{st}(M)$ .

Цель настоящей работы — определить спектр значений величины  $\|x_1 - s\|$ , где  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , и полностью охарактеризовать множество  $\text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  через пересечение сфер в преддуальном к  $L_1$  пространстве, а также построить липшицеву выборку из отображения  $\text{St}_4 : M_4 \rightarrow \text{st}(M_4)$  в пространстве действительных непрерывных функций  $C[K]$  на хаусдорфовом компакте  $K$ .

**1.** Нам понадобится описание множества  $\text{st}(M_3)$  в преддуальном к  $L_1$  пространстве.

**Лемма В** [6, 5]. Пусть пространство  $X$  преддуально к  $L_1$ ,  $x_1, x_2, x_3 \in X$ . Тогда

$$\text{st}(x_1, x_2, x_3) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap m[x_3, x_1] = \bigcap_{i=1}^3 S(x_i, r_i),$$

где  $r_i =: \frac{1}{2}(\|x_j - x_i\| + \|x_k - x_i\| - \|x_k - x_j\|)$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

Таким образом, для каждой точки  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3)$  в преддуальном к  $L_1$  пространстве верно равенство  $\|x_1 - s\| + \|x_2 - s\| = \|x_1 - x_2\|$ .

Пусть  $r_i^{(jk)} = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$ . Это расстояние от точки  $x_i$  до (любой) точки  $s \in \text{st}(x_i, x_j, x_k)$ , что следует из леммы В. Обозначим  $r_i^m = \min\{r_i^{(jk)} \mid \{j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}\}$ .

**Лемма 1.** Пусть пространство  $X$  преддуально к  $L_1$ ,  $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$ ,  $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ . Тогда  $r_1^m = r_1^{(23)}$ .

Действительно, если множество  $\{x_1, x_j, x_k\}$  отлично от  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , то считаем  $j = 4, k \in \{2, 3\}$ ,  $\{p\} = \{2, 3\} \setminus \{k\}$ . Тогда  $2r_1^{(4k)} = \|x_1 - x_4\| + \|x_1 - x_k\| - \|x_4 - x_k\|$ ,  $2r_1^{(23)} = \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| - \|x_2 - x_3\|$ . Преобразуя эти две величины, приходим к сравнению  $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$  и  $\|x_1 - x_p\| + \|x_k - x_4\|$ , т.е.  $r_1^{(4k)} \geq r_1^{(23)}$ .

**Замечание 1.** Треугольник  $x_1x_2x_3$  в лемме 1 определяется тем, что длина стороны, противоположной  $x_1$ , содержится как слагаемое в выражении  $\max(M_4)$ .

**Лемма 2.** Пусть пространство  $X$  преддуально к  $L_1$ ,  $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$ ,  $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ . Тогда существует точка  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3) \cap \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

**Доказательство.** Обозначим  $r_1 = r_1^{(23)}$ ,  $r_2 = r_2^{(13)} = \|x_1 - x_2\| - r_1$ ,  $r_3 = \|x_2 - x_3\| - r_2 = \|x_1 - x_3\| - r_1 = r_3^{(12)}$  (числа из леммы В) и  $r_4 = \|x_1 - x_4\| - r_1$ . Докажем, что сферы  $S(x_i, r_i)$  попарно пересекаются. Достаточно проверить выполнение неравенств  $r_2 + r_4 \geq \|x_2 - x_4\|$  и  $r_3 + r_4 \geq \|x_3 - x_4\|$ , так как остальные неравенства обращаются в равенства в силу леммы В и выбора числа  $r_4$ .

Сумма  $r_3 + r_4 = \|x_1 - x_4\| - \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\|$  не меньше  $\|x_3 - x_4\|$  ввиду условия для  $\max(M_4)$ . Аналогично  $r_2 + r_4 = \|x_1 - x_4\| - \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_3\| \geq \|x_2 - x_4\|$ .

Таким образом, все неравенства треугольника для радиусов сфер выполнены, поэтому сферы  $S(x_i, r_i)$ , а значит, и шары  $B(x_i, r_i)$  попарно пересекаются. Следовательно, в силу свойства п.2.I.P. пространства  $X$  множество  $\bigcap_{i=1}^4 B(x_i, r_i)$  непусто. По лемме В пересечение шаров  $\bigcap_{i=1}^3 B(x_i, r_i)$  есть пересечение сфер  $\bigcap_{i=1}^3 S(x_i, r_i)$ , поэтому  $\bigcap_{i=1}^4 B(x_i, r_i) \subset \bigcap_{i=1}^3 S(x_i, r_i)$ . К тому же  $B(x_1, r_1) \cap B(x_4, r_4) = S(x_1, r_1) \cap S(x_4, r_4)$ . Поэтому пересечение сфер  $\bigcap_{i=1}^4 S(x_i, r_i)$  непусто и существует точка  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3) \cap S(x_4, r_4)$ . При этом  $\|x_1 - s\| + \|x_2 - s\| + \|x_3 - s\| + \|x_4 - s\| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ , т.е.  $s \in \text{st}(M_4) = m[x_1, x_4] \cap m[x_2, x_3]$ .

Лемма доказана.

**Замечание 2.** В условиях леммы 2 для точки  $s$  выполнены равенства

$$\|x_1 - s\| = r_1^m, \|x_i - s\| = \|x_1 - x_i\| - r_1^m, i = 2, 3, 4.$$

**Следствие 2.** Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1$ ,  $x_1, x_2, x_3 \in X$ . Для произвольной точки  $x_4 \in X$  найдется такая точка  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3)$ , что  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Действительно, длина одной из сторон треугольника  $x_1x_2x_3$  будет содержаться как слагаемое в  $\max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ . Без ограничения общности считаем, что это  $x_2x_3$ . Тогда применима лемма 2.

**Лемма 3.** Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1$ ,  $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$ . Наименьшее значение  $\|x_1 - s\|$  при  $s \in \text{st}(M_4)$  равно  $r_1^m$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности считаем  $\max(M_4) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$ . Тогда по лемме 1 имеем  $r_1^m = r_1^{(23)}$ . Для точки  $s \in \text{st}(M_4) \cap \text{st}(x_1, x_2, x_3)$  (из леммы 2) расстояние  $\|x_1 - s\|$  равно  $r_1^m$ . Обозначим  $\|x_i - s\| = r_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Рассмотрим точку  $s_0$  с условием  $\|s_0 - x_1\| < r_1^m$ . Тогда  $\|x_2 - s_0\| > r_2$  и  $\|x_3 - s_0\| > r_3$  по замечанию 2, т.е.  $\|x_2 - s_0\| + \|x_3 - s_0\| > \|x_2 - x_3\| = r_2 + r_3$ . При этом  $\|x_4 - s_0\| \geq \|x_1 - x_4\| - \|x_1 - s_0\|$ . Следовательно,  $\sum_{i=1}^4 \|x_i - s_0\| > r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ , т.е.  $s_0 \notin \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Лемма доказана.

**Следствие 3.** Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1$ ,  $M_4 \subset X$ ,  $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ . Наибольшее расстояние от точки  $x_1$  до множества  $\text{st}(M_4)$  достигается для точки  $s \in \text{st}(x_4, x_2, x_3) \cap \text{st}(M_4)$ .

Действительно, наименьшее расстояние от точки  $x_4$  до множества  $\text{st}(M_4)$  реализуется на  $s$  по лемме 3, а сумма норм  $\|x_1 - s'\| + \|x_4 - s'\|$  одна и та же для всех точек  $s' \in \text{st}(M_4)$  в силу условия для  $\max(M_4)$ , поскольку  $\text{st}(M_4) \subset m[x_1, x_4]$ .

**Теорема 1.** Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1$ ,  $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$ ,  $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ ,  $s \in \text{st}(M_4)$ . Тогда (а) множество значений величины  $\|x_1 - s\|$  есть отрезок  $[r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ ; (б) при фиксированном числе  $R_1 = \|x_1 - s\| \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$  множество значений величины  $\|x_2 - s\| = R_2$  есть отрезок  $[A, B]$ , где

$$A = A(R_1) = \max\{\|x_1 - x_2\| - R_1, \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1\},$$

$$B = B(R_1) = \min\{\|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1, \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1\}.$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $s \in \text{st}(M_4)$ . Обозначим  $R_i = \|x_i - s\|$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Напомним, что  $R_1 + R_4 = \|x_1 - x_4\|$ ,  $R_2 + R_3 = \|x_2 - x_3\|$  в силу условия на  $\max(M_4)$ . По лемме 3 и следствию 3 имеем  $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ . Заметим, что  $R_2 \geq \|x_1 - x_2\| - R_1$ ,  $R_2 \geq \|x_4 - x_2\| - R_4 = \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1$ , т.е.  $R_2 \geq A(R_1)$ . Далее,  $R_2 = \|x_2 - x_3\| - R_3$  и  $R_3 \geq \|x_1 - x_3\| - R_1$ ,  $R_3 \geq \|x_4 - x_3\| - R_4 = \|x_4 - x_3\| - \|x_4 - x_1\| + R_1$ , откуда  $R_2 \leq \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1$  и  $R_2 \leq \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1$ , т.е.  $R_2 \leq B(R_1)$ .

(а) Зафиксируем число  $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ . Докажем, что для числа  $R_2 = A(R_1)$  существует такая точка  $s \in \text{st}(M_4)$ , что  $\|x_i - s\| = R_i$ ,  $i = 1, 2$ . Для этого достаточно проверить, что сферы  $S(x_i, R_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , имеют попарно непустое пересечение при  $R_3 = \|x_2 - x_3\| - R_2$ ,  $R_4 = \|x_1 - x_4\| - R_1$  в силу выбора  $\max(M_4)$ . Проверим выполнение неравенств  $R_i + R_j \geq \|x_i - x_j\|$ ,  $i = 1, 4$ ,  $j = 2, 3$ .

1) Если  $A = \|x_1 - x_2\| - R_1$ , то  $R_1 + R_2 = \|x_1 - x_2\|$ ,  $R_1 + R_3 = R_1 + \|x_2 - x_3\| - R_2 = 2R_1 + \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_2\| \geq 2r_1^m + \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_3\|$ . При этом  $R_4 + R_2 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + A \geq \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_4\| - \|x_1 - x_4\| + R_1 = \|x_2 - x_4\|$ ,  $R_4 + R_3 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_2\| + R_1 \geq \|x_3 - x_4\|$  (по определению  $\max(M_4)$ ).

2) Если же  $A = \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1$ , то  $R_1 + R_2 \geq R_1 + \|x_1 - x_2\| - R_1 = \|x_1 - x_2\|$ ,  $R_1 + R_3 = R_1 + \|x_2 - x_3\| - A = \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_2\| + \|x_4 - x_1\| \geq \|x_1 - x_3\|$  (в силу определения  $\max(M_4)$ ),  $R_4 + R_2 = \|x_4 - x_2\|$ . Далее нетрудно проверить, что при фиксированном  $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$  отрезок  $[A(R_1), B(R_1)]$  непуст, т.е.  $A \leq B$ . Для доказательства неравенства  $R_4 + R_3 \geq \|x_3 - x_4\|$  воспользуемся оценкой  $A \leq B = \min\{\|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1, \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1\} \leq$

$\|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + R_4$ . Поэтому  $R_4 + R_3 = R_4 + \|x_2 - x_3\| - R_2 \geq R_4 + \|x_2 - x_3\| - \|x_2 - x_3\| + \|x_3 - x_4\| - R_4 = \|x_3 - x_4\|$ .

Таким образом, для каждого числа  $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$  найдутся такие числа  $R_2, R_3, R_4$ , что  $\cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i) \neq \emptyset$  и  $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 + x_3\| = |\text{st}|(M_4)$ . Поэтому для точки (возможно, не единственной)  $s \in \cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i)$  выполнены условия  $\|x_i - s\| = R_i$  и  $s \in \text{st}(M_4)$ .

По лемме 3 и следствию 3 все точки  $s'$  с условием  $\|s' - x_1\| \notin [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$  не содержатся в множестве  $\text{st}(M_4)$ .

(б) Зафиксируем еще и число  $R_2 \in [A(R_1), B(R_1)]$  и докажем, что  $\cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i) \neq \emptyset$  при  $R_4 = \|x_1 - x_4\| - R_1, R_3 = \|x_2 - x_3\| - R_2$ . Необходимо проверить неравенства  $R_i + R_j \geq \|x_i - x_j\|, i = 1, 4, j = 2, 3$ .

Заметим, что  $R_1 + R_2 \geq R_1 + A \geq R_1 + \|x_1 - x_2\| - R_1 = \|x_1 - x_2\|$  и  $R_4 + R_3 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - R_2 \geq \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - B \geq \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - (\|x_2 - x_3\| - \|x_3 - x_4\| + \|x_1 - x_4\| - R_1) = \|x_3 - x_4\|$ . Аналогично  $R_4 + R_2 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + R_2 \geq \|x_1 - x_4\| - R_1 + A \geq \|x_2 - x_4\|$  и  $R_1 + R_3 = R_1 + \|x_2 - x_3\| - R_2 \geq R_1 + \|x_2 - x_3\| - B \geq \|x_1 - x_3\|$ .

Таким образом, сферы  $S(x_i, R_i), i = 1, 2, 3, 4$ , попарно пересекаются. Значит, в силу свойства п.2.I.P. и равенства  $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \max(M_4) = |\text{st}|(M_4)$  для каждого  $R_2$  найдется  $s \in \text{st}(M_4)$  с условием  $\|x_2 - s\| = R_2 \in [A, B]$  при фиксированном расстоянии  $R_1 = \|x_1 - s\|$ .

Теорема доказана.

Числа  $R_i = \|x_i - s\|, i = 1, 2, 3, 4$ , с условием  $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = |\text{st}|(M_4)$  задают подмножество  $\{s \in X : \|s - x_i\| = R_i, i = 1, 2, 3, 4\} = \cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i)$  в  $\text{st}(M_4)$ .

**Теорема 2.** Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1, M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X, \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ . Тогда

$$\text{st}(M_4) = \bigcup_{\substack{R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m] \\ R_2 \in [A(R_1), B(R_1)]}} (S(x_1, R_1) \cap S(x_2, R_2) \cap S(x_3, \|x_2 - x_3\| - R_2) \cap S(x_4, \|x_1 - x_4\| - R_1)).$$

**Доказательство.** В условиях теоремы множество точек  $s \in \text{st}(M_4)$ , удаленных от  $x_1$  на расстояние  $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ , есть в точности множество  $(S(x_1, R_1) \cap S(x_4, \|x_1 - x_4\| - R_1)) \cap (\cup_{R_2 \in [A(R_1), B(R_1)]} (S(x_2, R_2) \cap S(x_3, \|x_2 - x_3\| - R_2)))$  по теореме 1, (б) и по представлению  $\text{st}(M_4) = m[x_1, x_4] \cap m[x_2, x_3]$ . Отсюда и из теоремы 1, (а) получается утверждение теоремы 2.

Теорема доказана.

Приведем еще один пример построения точек Штейнера четырехэлементного множества.

**Утверждение.** Пусть пространство  $X$  предуально к  $L_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X, z \in \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4), s \in \text{st}(x_i, x_j, z), \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . Тогда  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности считаем, что  $i = 1, j = 2$ . Если  $s = z$ , то утверждение тривиально. Если величина  $\|x_1 - x_2\|$  входит в выражение  $\max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ , то  $s = z$ .

Пусть  $s \neq z$  и  $\max(M_4) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$ . Напомним, что  $\|x_1 - z\| = \|s - z\| + \|x_1 - s\|, \|x_2 - z\| = \|s - z\| + \|x_2 - s\|$  в силу определения  $s$  и  $z$  по лемме В. Тогда  $\|x_4 - x_1\| = \|x_4 - z\| + \|x_1 - z\| = \|x_4 - z\| + \|s - z\| + \|x_1 - s\| \geq \|x_4 - s\| + \|x_1 - s\| \geq \|x_4 - x_1\|$ , т.е.  $\|x_4 - s\| = \|s - z\| + \|x_4 - z\|$ . Аналогично  $\|x_3 - s\| = \|s - z\| + \|x_3 - z\|$ . Следовательно,  $\sum_{i=1}^4 \|x_i - s\| = \sum_{i=1}^4 \|x_i - z\|$ , т.е.  $s \in \text{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Утверждение доказано.

**2.** В связи с многозначностью отображения  $\text{St}_n : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{st}(x_1, \dots, x_n)$  естественно возникает вопрос о существовании хорошей выборки из этого отображения. Липшицевым выборкам из этого отображения в произвольных пространствах посвящена работа [7]. В пространстве  $l_\infty^n$  липшицева выборка из отображения  $\text{St}_n$  существует (теорема 1 из [7]), но явно не построена. В произвольных бесконечномерных предуальных к  $L_1$  пространствах о существовании липшицевых выборок автору ничего не известно, кроме примера липшицевой выборки из  $\text{St}_3$  в пространстве  $C[K]$  действительных, непрерывных на компакте  $K$  функций, построенного в [6]. Сформулируем соответствующий результат.

**Теорема С** [6]. Пусть  $x_1, x_2, x_3 \in C[K]$ . Отображение  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow V(t) = \min\{x_i(t) + r_i, i = 1, 2, 3\}$  является липшицевой выборкой из отображения  $\text{St}_3$  (здесь  $r_i = r_i(x_1, x_2, x_3)$  — числа из леммы В).

Докажем аналогичную теорему для отображения  $\text{St}_4$ . Для четверки точек  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = M_4 \subset C[K]$  при  $r_1 = r_1^m, r_2 = \|z_1 - z_2\| - r_1^m, r_3 = \|z_1 - z_3\| - r_1^m, r_4 = \|z_1 - z_4\| - r_1^m$  рассмотрим множество  $\cap_{i=1}^4 S(z_i, r_i) = \{s(t) \in C[K] : s(t) \in [\max_i\{x_i(t) - r_i\}, \min_i\{x_i(t) + r_i\}], t \in K\}$  (которое лежит в множестве  $\text{st}(M_4)$  по замечанию 2). Для каждой точки  $t \in K$  выберем наибольшее значение: будем рассматривать функцию  $V(t) = \min\{x_i(t) + r_i, i = 1, 2, 3, 4\}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C[K]$ . Отображение  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow V(t) = \min_{i=1}^4 \{x_i(t) + r_i\}$  является липшицевой выборкой из отображения  $St_4$  при  $r_1 = r_1^m, r_i = \|x_i - x_1\| - r_1, i = 2, 3, 4$ .

**Доказательство.** То, что отображение  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow V(t)$  — выборка из  $St_4$ , следует из леммы 2 и замечания 2.

Рассмотрим две четверки точек  $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  и  $M_y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ . Пусть

$$r_1 = r_1^m(x_1, x_2, x_3, x_4), r'_1 = r_1^m(y_1, y_2, y_3, y_4), r_i = \|x_1 - x_i\| - r_1, r'_i = \|y_1 - y_i\| - r'_1,$$

$$s(t) = \min_i \{x_i(t) + r_i\} \in st(M_x), s'(t) = \min_i \{y_i(t) + r'_i\} \in st(M_y).$$

Оценим разность  $|r_1 - r'_1|$ . Для этого рассмотрим два случая.

1) Пусть  $\max(M_x) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$  и  $\max(M_y) = \|y_1 - y_4\| + \|y_2 - y_3\|$ . Тогда  $r_1 = r_1^{(23)}(M_x) = \frac{1}{2}(\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| - \|x_2 - x_3\|)$ ,  $r'_1 = r_1^{(23)}(M_y) = \frac{1}{2}(\|y_1 - y_2\| + \|y_1 - y_3\| - \|y_2 - y_3\|)$  и  $|r_1 - r'_1| \leq \frac{1}{2}(\|x_1 - x_2\| - \|y_1 - y_2\| + \|x_1 - x_3\| - \|y_1 - y_3\| + \|\|y_2 - y_3\| - \|x_2 - x_3\|\|)$ . Заметим теперь, что

$$\|\|x_n - x_m\| - \|y_n - y_m\|\| \leq \|\|x_n - y_n\| + \|y_n - y_m\| + \|x_m - y_m\| - \|y_n - y_m\|\| = \|x_n - y_n\| + \|x_m - y_m\|. \quad (2)$$

Тогда

$$|r_1 - r'_1| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| + \|x_3 - y_3\| \leq \sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|. \quad (3)$$

2) Пусть  $\max(M_x) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$ , а  $\max(M_y) = \|y_1 - y_2\| + \|y_3 - y_4\|$  (без ограничения общности), и пусть без ограничения общности  $r_1 \leq r'_1$ . Тогда  $|r_1 - r'_1| = r'_1 - r_1 = r_1^{(34)}(M_y) - r_1^{(23)}(M_x) \leq r_1^{(23)}(M_y) - r_1^{(23)}(M_x)$  по лемме 1 и применимы оценки из предыдущего случая — неравенство (3) выполнено.

Заметим теперь, что  $|r_i - r'_i| = \|\|x_i - x_1\| - r_1 - \|y_i - y_1\| + r'_1\| \leq \|\|x_i - x_1\| - \|y_i - y_1\|\| + |r_1 - r'_1| \leq \|x_i - y_i\| + \|x_1 - y_1\| + |r_1 - r'_1|$  по формуле (2), что не превосходит  $2 \sum_{j=1}^4 \|x_j - y_j\|$  в силу (3),  $i = 2, 3, 4$ . Таким образом,

$$|r_i - r'_i| \leq 2 \sum_{j=1}^4 \|x_j - y_j\|, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Оценим  $|s(t) - s'(t)|$  в каждой точке  $t \in K$ . Для этого опять же рассмотрим два случая.

(а) Допустим, что  $s(t) = x_i(t) + r_i$  и  $s'(t) = y_i(t) + r'_i$ . Тогда с учетом (4) выполнены неравенства

$$|s(t) - s'(t)| = |x_i(t) - y_i(t) + r_i - r'_i| \leq \|x_i - y_i\| + |r_i - r'_i| \leq 3 \sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|.$$

(б) Пусть теперь  $s(t) = x_i(t) + r_i$  и  $s'(t) = y_j(t) + r'_j, i \neq j$ . Без ограничения общности считаем, что  $\max\{x_i(t) + r_i, y_j(t) + r'_j\} = x_i(t) + r_i$ . Поскольку  $x_i(t) + r_i \leq x_j(t) + r_j$ , то  $|s(t) - s'(t)| = x_i(t) + r_i - y_j(t) - r'_j \leq x_j(t) + r_j - y_j(t) - r'_j \leq \|x_i - y_i\| + |r_i - r'_i|$ , что с учетом (4) не превосходит  $3 \sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|$ .

Таким образом,  $\|s - s'\| \leq 3 \sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|$ , т.е. отображение  $V$  — липшицева выборка из отображения  $St_4$  с константой Липшица не более 3.

Теорема доказана.

Нетрудно доказать, что отображение  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow V'(t) = \min_{i=1}^4 \{x_i(t) + \rho_i\}$  задает липшицеву выборку из отображения  $St_4$  с константой Липшица не более 2 (как и в примере выборки из  $St_3$ ) при

$$\rho_i = \frac{\|x_i - x_j\|}{2} + \frac{\|x_i - x_k\| + \|x_i - x_l\|}{4} - \frac{\|x_j - x_k\| + \|x_j - x_l\|}{4},$$

где  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , а величина  $\|x_i - x_j\| + \|x_k - x_l\|$  определяет  $\max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ .

Автор приносит благодарность П. А. Бородину за внимание к работе и полезные замечания.

Работа поддержана РФФИ (проект №18-01-00333) и Программой Президента РФ “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ 6222.2018.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lima A.A.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1977. **227**. 1–62.
2. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces  $L^1$  // *Can. J. Math.* 1955. **7**, N 4. 552–561.
3. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1964. **48**. 1–112.
4. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // *Матем. сб.* 2014. **205**, № 4. 3–19.
5. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // *Матем. сб.* 2016. **207**, № 8. 31–46.
6. *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2011. № 6. 26–31.
7. *Беднов Б.Б., Бородин П.А., Чеснокова К.В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // *Матем. сб.* 2018. **209**, № 2. 3–21.

Поступила в редакцию  
20.02.2019

УДК 512.813.52+517.955.4+517.983.37+517.987.4+519.216.22

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ИНТЕГРАЛ ВИНЕРА

С. В. Мамон<sup>1</sup>

Изучаются вопросы, связанные с приложениями функциональных интегралов к эволюционным уравнениям, в частности с нахождением представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на трехпараметрической группе Гейзенберга  $H_3(\mathbb{R})$  в виде интеграла Винера в пространстве траекторий из  $C[0, t] \times C[0, t]$ .

*Ключевые слова:* группа Гейзенберга, интеграл Винера, сублапласиан, марковский процесс на группе Гейзенберга, однопараметрическая полугруппа операторов, производящий оператор полугруппы, формула Фейнмана–Каца.

The issues related to applications of functional integrals to evolution equations are studied. In particular, this is the problem of representation of solutions to the Cauchy problem for the heat equation in the three-parameter Heisenberg group  $H_3(\mathbb{R})$  in terms of Wiener integral in the space of trajectories from  $C[0, t] \times C[0, t]$ .

*Key words:* Heisenberg group, Wiener integral, sub-Laplacian, Markov process in Heisenberg group, one-parameter semigroup of operators, infinitesimal operator of semigroup, Feynman–Kac formula.

В 1976 г. А. Хиланикья в работе [1], а затем в 1977 г. Б. Гаво в работе [2] вычислили тепловое ядро, отвечающее сублапласиану на группе Гейзенберга  $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ , с применением техники преобразования Фурье. Также вопрос о нахождении теплового ядра на  $H_{2n+1}(\mathbb{R})$  рассматривался у С. Ватанабе в работе [3], где оно находилось с использованием исчисления Маллявена. В работе автора [4] было показано, как это тепловое ядро может быть вычислено с помощью свойств дельта-функции Дирака в комбинации с идеей интегрирования относительно меры Винера на множестве траекторий двумерного винеровского процесса на  $\mathbb{R}^2$ . Для этого был рассмотрен случайный процесс  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z^+(\tau))$ , где  $x(\tau), y(\tau)$  — независимые винеровские процессы, а  $z^+(\tau)$  — ориентированная площадь на плоскости  $Oxy$ , заметаемая радиусом-вектором с координатами  $(x(\tau), y(\tau))$ . Было получено представление переходной плотности этого процесса в виде интеграла Винера в пространстве  $C[0, t] \times C[0, t]$ . Далее, с помощью этого представления была установлена гейзенберговская

<sup>1</sup>*Мамон Сергей Владимирович* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sergey.mamon.msu@yandex.ru.

*Mamon Sergei Vladimirovich* — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

марковость процесса  $\mathbf{r}(\tau)$ , а также через интеграл Винера было выражено решение задачи Коши для параболического уравнения, соответствующего сублапласиану на группе  $H_3(\mathbb{R})$ . При этом решение было найдено автором только для специального случая, когда потенциальная функция  $V$  зависела от двух переменных, соответствующих винеровским траекториям  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$ , т.е. для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x^2 + y^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) - V(x, y)u.$$

Это решение имело следующий вид:

$$u(X, Y, Z, t) = \iint_{\substack{C[0,t] \times C[0,t] \\ x(0)=0, y(0)=0}} \psi_0 \left( x(t) + X, y(t) + Y, Z + \frac{1}{2} [y(t)X - x(t)Y] + \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau) dy(\tau) - y(\tau) dx(\tau) \right) \exp \left\{ - \int_0^t V(x(\tau) + X, y(\tau) + Y) d\tau \right\} dW_x dW_y,$$

где  $W$  — мера Винера на множестве непрерывных функций  $\xi(t)$ , удовлетворяющих условию  $\xi(0) = 0$ . В настоящей работе получено представление этого решения в общем случае, когда  $V = V(x, y, z)$ .

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Пусть для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x^2 + y^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) - V(x, y, z)u \tag{1}$$

в области  $G_T = \{x, y, z \in \mathbb{R}, 0 < t < \infty\}$ , где функция  $V(x, y, z)$  непрерывна и ограничена снизу на  $\mathbb{R}^3$ , в классе  $u(x, y, z, t) \in C^{2,1}(G_T) \cap C(\overline{G_T})$  рассматривается задача Коши с начальной функцией  $u(x, y, z, 0) = \psi_0(x, y, z) \in C(\mathbb{R}^3)$ ,  $\|\psi_0\|_C < \infty$ . Тогда ее решение предоставляет общий вид однопараметрической полугруппы операторов, производящий оператор  $H$  которой дается выражением в правой части (1), а действие на функцию  $\psi_0$  выражается с помощью интеграла Винера следующим образом:

$$\begin{aligned} & (e^{-Ht}\psi_0)(X, Y, Z, t) = u(X, Y, Z, t) = \\ & = \iint_{\substack{C[0,t] \times C[0,t] \\ x(0)=0, y(0)=0}} \psi_0 \left( x(t) + X, y(t) + Y, \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau) dy(\tau) - y(\tau) dx(\tau) - \frac{1}{2} [x(t)Y - y(t)X] + Z \right) \times \\ & \quad \times \exp \left\{ - \int_0^t V \left( x(\tau) + X, y(\tau) + Y, \frac{1}{2} \int_0^\tau x(s) dy(s) - y(s) dx(s) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} [x(\tau)Y - y(\tau)X] + Z \right) d\tau \right\} dW_x dW_y. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция  $u(X, Y, Z, t)$ . Подобно тому, как это делалось в статье [4], запишем сначала выражение для  $u(X, Y, Z, t + \Delta t)$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} & u(X, Y, Z, t + \Delta t) = \\ & = \iint_{C[0,t+\Delta t] \times C[0,t+\Delta t]} \psi_0 \left( \xi(t + \Delta t) + X, \eta(t + \Delta t) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\eta(\tau) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} [\xi(t + \Delta t)Y - \eta(t + \Delta t)X] + Z \right) \exp \left\{ - \int_0^{t+\Delta t} V \left( \xi(\tau) + X, \eta(\tau) + Y, \right. \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \xi(s) d\eta(s) - \eta(s) d\xi(s) - \frac{1}{2} [\xi(\tau)Y - \eta(\tau)X] + Z \Big) d\tau \Big) dW\xi dW\eta.$$

Далее, разобьем отрезок  $[0, t + \Delta t]$  на два непересекающихся участка  $[0, \Delta t]$  и  $(\Delta t, t + \Delta t]$ . Параметр  $\tau$  на отрезке  $[0, \Delta t]$  будем обозначать через  $\tau_1$ . Траектории  $\xi(\tau)$ ,  $\eta(\tau)$  при  $\tau \in [0, \Delta t]$  будем обозначать через  $\xi'(\tau_1)$  и  $\eta'(\tau_1)$  соответственно. Если же  $\tau \in (\Delta t, t + \Delta t]$ , то справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= \xi(\tau) - \xi'(\Delta t) + \xi'(\Delta t) = \xi''(\tau_2) + \xi'(\Delta t), \\ \eta(\tau) &= \eta(\tau) - \eta'(\Delta t) + \eta'(\Delta t) = \eta''(\tau_2) + \eta'(\Delta t), \quad \tau_2 = \tau - \Delta t \in (0, t], \end{aligned}$$

где через  $\xi''(\tau_2)$  и  $\eta''(\tau_2)$  обозначены траектории процессов  $W_1(\tau) - W_1(\Delta t)$  и  $W_2(\tau) - W_2(\Delta t)$ , распределенных как  $W_1(\tau - \Delta t)$  и  $W_2(\tau - \Delta t)$  и независимых от процессов  $W_1(\Delta t)$  и  $W_2(\Delta t)$  соответственно с траекториями  $\xi'(\Delta t)$  и  $\eta'(\Delta t)$ . В частности, справедливы равенства

$$\xi(t + \Delta t) = \xi''(t) + \xi'(\Delta t), \quad \eta(t + \Delta t) = \eta''(t) + \eta'(\Delta t). \quad (2)$$

Раскладывая теперь криволинейный интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\eta(\tau) - \eta(\tau) d\xi(\tau)$$

в сумму двух интегралов на  $[0, \Delta t]$  и  $(\Delta t, t + \Delta t]$ , выполняя во втором интеграле замену  $\tau = \tau_2 + \Delta t$  и пользуясь равенствами (2), получим, что он преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{t+\Delta t} \xi(\tau) d\eta(\tau) - \eta(\tau) d\xi(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1) d\eta'(\tau_1) - \eta'(\tau_1) d\xi'(\tau_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \xi''(\tau_2) d\eta''(\tau_2) - \eta''(\tau_2) d\xi''(\tau_2) + \frac{1}{2} [\xi'(\Delta t)\eta''(t) - \eta'(\Delta t)\xi''(t)]. \end{aligned}$$

Эту же самую процедуру сделаем для множителя, содержащего функцию  $V$ . Получим, что он распадается на два сомножителя, первый из которых есть

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \int_0^{\Delta t} V \left( \xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \xi'(s_1) d\eta'(s_1) - \eta'(s_1) d\xi'(s_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (\xi'(\tau_1)Y - \eta'(\tau_1)X) + Z \right) d\tau_1 \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Во втором сделаем замену переменной  $\tau = \tau_2 + \Delta t$  и, вновь используя равенства (2), получим для интеграла, стоящего в показателе экспоненты, следующую цепочку:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta t}^{t+\Delta t} V \left( \xi(\tau) + X, \eta(\tau) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \xi(s_2) d\eta(s_2) - \eta(s_2) d\xi(s_2) - \frac{1}{2} [\xi(\tau)Y - \eta(\tau)X] + Z \right) d\tau = \\ = \int_0^t V \left( \xi(\tau_2 + \Delta t) + X, \eta(\tau_2 + \Delta t) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2 + \Delta t} \xi(s_2) d\eta(s_2) - \eta(s_2) d\xi(s_2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [\xi(\tau_2 + \Delta t)Y - \eta(\tau_2 + \Delta t)X] + Z \right) d\tau_2 = \end{aligned}$$

$$= \int_0^t V \left( \xi''(\tau_2) + \xi'(\Delta t) + X, \eta''(\tau_2) + \eta'(\Delta t) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1) d\eta'(\tau_1) - \eta'(\tau_1) d\xi'(\tau_1) d\tau_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Delta t}^{\tau_2 + \Delta t} \xi(s_2) d\eta(s_2) - \eta(s_2) d\xi(s_2) - \frac{1}{2} [(\xi''(\tau_2) + \xi'(\Delta t))Y - (\eta''(\tau_2) + \eta'(\Delta t))X] + Z \right) d\tau_2. \quad (4)$$

В интеграле по отрезку  $[\Delta t, \tau_2 + \Delta t]$  снова сделав замену  $s_2 = \tau_3 + \Delta t$ , запишем его в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} \xi''(\tau_3) d\eta''(\tau_3) - \eta''(\tau_3) d\xi''(\tau_3) + \frac{1}{2} [\xi'(\Delta t)\eta''(\tau_2) - \eta'(\Delta t)\xi''(\tau_2)]. \quad (5)$$

Учитывая теперь выражения (3)–(5), а также независимость друг от друга траекторий  $\xi'', \eta''$  и  $\xi', \eta'$  соответственно, получим, что функция  $u(X, Y, Z, t + \Delta t)$  представляется в виде следующего двойного интеграла по плоской мере Винера:

$$\iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \iint_{C[0, t] \times C[0, t]} \psi_0 \left( \xi''(t) + \xi'(\Delta t) + X, \eta''(t) + \eta'(\Delta t) + Y, \right. \\ \frac{1}{2} \int_0^t \xi''(\tau_2) d\eta''(\tau_2) - \eta''(\tau_2) d\xi''(\tau_2) - \frac{1}{2} [\xi''(t)(\eta'(\Delta t) + Y) - \eta''(t)(\xi'(\Delta t) + X)] + \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1) d\eta'(\tau_1) - \eta'(\tau_1) d\xi'(\tau_1) - \frac{1}{2} [\xi'(\Delta t)Y - \eta'(\Delta t)X] + Z \right) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{\Delta t} V \left( \xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \xi'(s_1) d\eta'(s_1) - \eta'(s_1) d\xi'(s_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (\xi'(\tau_1)Y - \eta'(\tau_1)X) + Z \right) d\tau_1 \right\} \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^t V \left( \xi''(\tau_2) + \xi'(\Delta t) + X, \eta''(\tau_2) + \eta'(\Delta t) + Y, \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} \xi''(\tau_3) d\eta''(\tau_3) - \eta''(\tau_3) d\xi''(\tau_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} [\xi''(\tau_2)(\eta'(\Delta t) + Y) - \eta''(\tau_2)(\xi'(\Delta t) + X)] + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1) d\eta'(\tau_1) - \eta'(\tau_1) d\xi'(\tau_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} [\xi'(\Delta t)Y - \eta'(\Delta t)X] + Z \right) d\tau_2 \right\} d_W \xi' d_W \eta' d_W \xi'' d_W \eta''. \quad (6)$$

Для того чтобы было проще и нагляднее показать, как согласуется полученное выражение (6) с представлением функции  $u(X, Y, Z, t)$  в формулировке теоремы, введем следующее обозначение:

$$S(\xi(t), \eta(t), X, Y) = \frac{1}{2} \int_0^t \xi(\tau) d\eta(\tau) - \eta(\tau) d\xi(\tau) - \frac{1}{2} [\xi(t)Y - \eta(t)X].$$

В этих обозначениях интеграл (6) запишется в виде

$$\iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \iint_{C[0, t] \times C[0, t]} \psi_0 \left( \xi''(t) + \xi'(\Delta t) + X, \eta''(t) + \eta'(\Delta t) + Y, \right.$$

$$\begin{aligned}
& S(\xi''(t), \eta''(t), \xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y) + S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z) \times \\
& \times \exp \left\{ - \int_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) + gZ) d\tau_1 \times \right. \\
& \quad \times \exp \left\{ - \int_0^t V(\xi''(\tau_2) + \xi'(\Delta t) + X, \eta''(\tau_2) + \eta'(\Delta t) + Y, \right. \\
& \quad \left. S(\xi''(\tau_2), \eta''(\tau_2), \xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y) + S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z) d\tau_2 \right\} \times \\
& \quad \left. \times d_W \xi'' d_W \eta'' d_W \xi' d_W \eta', \right. \tag{7}
\end{aligned}$$

а функция  $u(X, Y, Z, t)$ , фигурирующая в формулировке теоремы, — в виде

$$\begin{aligned}
u(X, Y, Z, t) = & \iint_{C[0, t] \times C[0, t]} \psi_0(\xi(t) + X, \eta(t) + Y, S(\xi(t), \eta(t), X, Y) + Z) \times \\
& \times \exp \left\{ - \int_0^t V(\xi(\tau) + X, \eta(\tau) + Y, S(\xi(\tau), \eta(\tau), X, Y) + Z) d\tau \right\} d_W \xi d_W \eta. \tag{8}
\end{aligned}$$

Теперь, сопоставляя представления (7) и (8), уже несложно понять, что в (7) можно проинтегрировать по траекториям  $\xi''$  и  $\eta''$ , в результате чего для  $u(X, Y, Z, t + \Delta t)$  будем иметь представление

$$\begin{aligned}
& \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} u(\xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y, S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z, t) \times \\
& \times \exp \left\{ - \int_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) + Z) d\tau_1 \right\} d_W \xi' d_W \eta'.
\end{aligned}$$

Вычитая теперь из этого выражения  $u(X, Y, Z, t)$  и разлагая в ряды последовательно сначала экспоненту, а затем функцию

$$u(\xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y, S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z, t)$$

в окрестности точки  $(X, Y, Z, t)$ , получим следующую цепочку:

$$\begin{aligned}
& \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \left\{ u(\xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y, S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z, t) \times \right. \\
& \quad \times \left( 1 - \int_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) + Z) d\tau_1 + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2!} \left( \int_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) + Z) d\tau_1 \right)^2 - \dots \right) - \right. \\
& \quad \left. - u(X, Y, Z, t) \right\} d_W \xi' d_W \eta' = \frac{\partial u}{\partial x} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \xi'(\Delta t) d_W \xi' d_W \eta' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial u}{\partial y} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \eta'(\Delta t) dW \xi' dW \eta' + \frac{\partial u}{\partial z} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) dW \xi' dW \eta' + \\
 & + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} (\xi'(\Delta t))^2 dW \xi' dW \eta' + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} (\eta'(\Delta t))^2 dW \xi' dW \eta' + \\
 & + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \left( S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) \right)^2 dW \xi' dW \eta' + \\
 & + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \xi'(\Delta t) \eta'(\Delta t) dW \xi' dW \eta' + \\
 & + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \xi'(\Delta t) S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) dW \xi' dW \eta' + \\
 & + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \eta'(\Delta t) S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) dW \xi' dW \eta' + \dots - \\
 & - \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} u(\xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y, S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z, t) \times \\
 & \times \int_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) + Z) d\tau_1 dW \xi' dW \eta' + \\
 & + \frac{1}{2!} \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} u(\xi'(\Delta t) + X, \eta'(\Delta t) + Y, S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + Z, t) \times \\
 & \times \left( \int_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1) + X, \eta'(\tau_1) + Y, S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) + Z) d\tau_1 \right)^2 dW \xi' dW \eta' - \dots
 \end{aligned}$$

Предпоследнее слагаемое в этой сумме имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \iint_{C[0, \Delta t] \times C[0, \Delta t]} \left( u(X, Y, Z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \xi'(\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial y} \eta'(\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial z} S(\xi'(\Delta t), \eta'(\Delta t), X, Y) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\xi'(\Delta t))^2 + \dots \right) \cdot \left( V(X, Y, Z) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} \int_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1) d\tau_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \int_0^{\Delta t} \eta'(\tau_1) d\tau_1 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial V}{\partial z} \int_0^{\Delta t} S(\xi'(\tau_1), \eta'(\tau_1), X, Y) d\tau_1 + \frac{1}{2!} \int_0^{\Delta t} (\xi'(\tau_1))^2 d\tau_1 + \dots \right) dW \xi' dW \eta' = \\
 & = u(X, Y, Z, t) V(X, Y, Z) \Delta t + o(\Delta t). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Остальные слагаемые в сумме (9) начиная с последнего имеют порядок относительно  $\Delta t$ , превосходящий единицу. Остальные винеровские интегралы, фигурирующие в равенстве (9), либо равны нулю, либо являются величинами порядка  $\Delta t$ . Вычисляя их, а затем деля равенство (9) на  $\Delta t$  и переходя в полученном соотношении к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , заключаем, что функция  $u(X, Y, Z, t)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x^2 + y^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) - V(x, y, z) u,$$

что завершает доказательство теоремы.

Автор приносит благодарность научному руководителю Е. Т. Шавгулидзе за постановку задачи и ценные замечания при подготовке статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hulanicki A.* The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field // Stud. math. 1976. **56**, N 2. 165–173.
2. *Gaveau B.* Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimatees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents // Acta math. 1977. **139**, N 1–2. 95–153.
3. *Vatanabe S.* Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and it's applications to heat kernels // Ann. Probab. 1987. **15**, N 1. 1–39.
4. *Мамон С.В.* Мера Винера на группе Гейзенберга и параболические уравнения // Фунд. и прикл. матем. 2016. **21**, № 4. 67–98.

Поступила в редакцию  
26.09.2016

После доработки  
26.09.2018

УДК 515.124, 515.126.4, 512.562

## ПОИСК НУЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛОВ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. Н. Фоменко<sup>1</sup>

Доказаны принцип поиска нулей  $(\alpha, \beta)$ -поисковых функционалов и вытекающие из него теоремы о неподвижных точках и совпадениях наборов однозначных и многозначных отображений  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств. Полученные теоремы являются развитием установленных ранее автором результатов для метрических пространств. В частности, получено обобщение недавнего результата о совпадениях накрывающего и липшицева отображений  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств.

*Ключевые слова:*  $(b_1, b_2)$ -квазиметрическое пространство,  $(\alpha, \beta)$ -поисковый функционал, неподвижная точка, точка совпадения.

The cascade search principle for zeros of  $(\alpha, \beta)$ -search functionals and consequent fixed point and coincidence theorems are proved for collections of single-valued and set-valued mappings of  $(b_1, b_2)$ -quasimetric spaces. These results are extensions of some previous author's results in metric spaces. In particular, a generalization is obtained for some recent result on coincidences of a covering mapping and a Lipschitzian mappings of  $(b_1, b_2)$ -quasimetric spaces.

*Key words:*  $(b_1, b_2)$ -quasimetric space,  $(\alpha, \beta)$ -search functional, fixed point, coincidence point.

**1. Введение и предварительные сведения.** Полезным методом исследования функционалов, заданных на метрическом пространстве, является принцип поиска нулей так называемых  $(\alpha, \beta)$ -поисковых функционалов, разработанный в [1–3]. Важность этого принципа заключается и в том, что из него получается целый ряд теорем о существовании неподвижных точек, точек совпадения наборов отображений (как однозначных, так и многозначных) метрических пространств, а также теорем о существовании прообразов заданного подпространства метрического пространства, представленных в [1–3].

<sup>1</sup> *Фоменко Татьяна Николаевна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей математики ф-та ВМК МГУ, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

*Fomenko Tatiana Nikolaevna* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.

В настоящей работе результаты работ [1–3] о поиске нулей  $(\alpha, \beta)$ -функционалов, а также о неподвижных точках и совпадениях отображений метрических пространств распространяются на случай  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств. Рассматриваются как однозначные, так и многозначные функционалы и отображения. В частности, получены обобщения некоторых результатов работы [4].

Приведем сначала необходимые обозначения, определения и некоторые результаты для метрических пространств из работ [1–3]. Для полноты изложения представим их с краткими доказательствами.

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неотрицательный функционал. Будем обозначать через  $\text{Nil}(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) = 0\} = A \subset X$  множество нулей функционала  $\varphi$ ,  $\text{Graph}(\varphi) := \{(x, \varphi(x))\}_{x \in X}$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что график  $\text{Graph}(\varphi)$   $\{0\}$ -полон, если любая фундаментальная последовательность  $\{x_k\} \subseteq X$ , такая, что  $\varphi(x_k)$  сходится к нулю, имеет предел  $\xi \in X$  и  $\varphi(\xi) = 0$ . График  $\text{Graph}(\varphi)$  называется  $\{0\}$ -замкнутым, если для любой последовательности  $\{(x_k, \varphi(x_k))\} \subseteq \text{Graph}(\varphi)$ , сходящейся к  $(\xi, 0) \in X \times \mathbb{R}_+$ , верно, что  $(\xi, 0) \in \text{Graph}(\varphi)$ , т.е.  $\varphi(\xi) = 0$ .

**Определение 2.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство. Функционал  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется  $(\alpha, \beta)$ -поисковым на  $X$  (относительно метрики  $d$ ), если для любой точки  $x_0 \in X$  существует точка  $x' \in X$ , для которой  $d(x_0, x') \leq \frac{\varphi(x_0)}{\alpha}$ ,  $\varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_0)$ .

В работе [1] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1** [1, теорема 1]. Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неотрицательный  $(\alpha, \beta)$ -поисковый на  $X$  функционал, где  $0 < \beta < \alpha$ . Пусть либо график  $\text{Graph}(\varphi)$  функционала  $\varphi$  является 0-полным, либо  $X$  — полное пространство и график  $\text{Graph}(\varphi)$  0-замкнут. Тогда для каждой точки  $x_0 \in X$  существует такая точка  $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$ , что  $d(x_0, \xi) \leq \frac{\varphi(x_0)}{\alpha - \beta}$ .

**Доказательство** Пусть  $x_0 \in X$  — произвольная фиксированная точка. В силу условий теоремы и определения  $(\alpha, \beta)$ -поискового функционала  $\varphi$  можно построить последовательность точек  $\{x_m\}_{m=0,1,2,\dots}$ , удовлетворяющую следующим условиям: (а)  $d(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{\varphi(x_m)}{\alpha}$ ; (б)  $\varphi(x_{m+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_m)$ , причем если точка  $x_m$  уже выбрана и  $\varphi(x_m) = 0$ , т.е.  $x_m \in A$ , то полагаем  $x_j = x_m$  для всех  $j > m$ . Если же  $\varphi(x_m) > 0$ , то согласно условиям теоремы и определению  $(\alpha, \beta)$ -поискового функционала  $\varphi$  существует точка  $x_{m+1}$ , удовлетворяющая условиям (а) и (б). Эта последовательность фундаментальна, так как  $d(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{\varphi(x_m)}{\alpha} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \cdot \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . Кроме того, ясно, что  $\varphi(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . Следовательно, последовательность  $\{(x_m, \varphi(x_m))\}_{m=0,1,\dots}$  точек графика  $\varphi$  фундаментальна. А поскольку либо график  $\text{Graph}(\varphi)$  0-полон, либо пространство  $X$  полно и график  $\text{Graph}(\varphi)$  0-замкнут, то в обоих случаях эта последовательность точек графика сходится к некоторой точке  $(\xi, 0)$  и  $(\xi, 0) \in \text{Graph}(\varphi)$ . Это означает, что  $\varphi(\xi) = 0$ , т.е.  $\xi \in A$ . Расстояние  $d(x_0, \xi)$  несложно оценить:

$$d(x_0, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_0, x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m d(x_{k-1}, x_k) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k-1} \cdot \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha - \beta}. \quad \square$$

Отметим, что в [5] получено другое доказательство теоремы 1, а именно с использованием упорядочивания метрического пространства по методу Брондстеда (Brøndsted).

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. В ней фигурирует аналог  $(\alpha, \beta)$ -поискового функционала на подмножестве декартова произведения метрических пространств. Пусть  $(X, d), (Y, \mu)$  — метрические пространства. Метрика в  $X \times Y$  задана по правилу  $\nu((x, y), (x', y')) := d(x, x') + \mu(y, y')$ ,  $\forall x, x' \in X, y, y' \in Y$ .

**Теорема 2.** Пусть  $D \subseteq X \times Y$  — заданное замкнутое подмножество,  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неотрицательный функционал. Пусть для функционала  $\varphi$  и чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$ , выполнены следующие условия. Для каждой точки  $(x, y) \in D$  существует точка  $(x', y') \in D$ , такая, что  $d(x, x') \leq \alpha^{-1}\varphi(x, y)$ ,  $d(y, y') \leq \gamma\varphi(x, y)$  и  $\varphi(x', y') \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x, y)$ . Пусть также либо график  $\text{Graph}(\varphi)$  функционала  $\varphi$  является 0-полным, либо  $D$  — полное пространство и график  $\text{Graph}(\varphi)$  0-замкнут.

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in D$  существует последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq D$ , сходящаяся к некоторой точке  $(\xi, \psi) \in D$ , где  $\varphi(\xi, \psi) = 0$ , и верны следующие оценки на расстояния:  $d(x_0, \xi) \leq \frac{\varphi(x_0, y_0)}{\alpha - \beta}$ ,  $\mu(y_0, \psi) \leq \frac{\gamma\alpha\varphi(x_0, y_0)}{\alpha - \beta}$ .

**Доказательство.** Зафиксируем начальную точку  $(x_0, y_0) \in D$ . Исходя из условий теоремы, можно построить начинающуюся из этой точки последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots}$ , удовлетворяющую условиям  $d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{-1}\varphi(x_k, y_k)$ ,  $d(y_k, y_{k+1}) \leq \gamma\varphi(x_k, y_k)$  и  $\varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k, y_k)$ ,

$k = 0, 1, \dots$ . Отсюда следует, что  $\nu((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leq K\varphi(x_k, y_k)$ , где  $K = \alpha^{-1} + \gamma$ . Поэтому имеем

$$\nu((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k K\varphi(x_0, y_0).$$

Таким образом, последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots}$ , а также каждая из последовательностей  $\{x_k\}_{k=0,1,\dots}$ ,  $\{y_k\}_{k=0,1,\dots}$  являются фундаментальными. В силу условий теоремы все они сходятся к некоторым точкам  $(\xi, \psi)$ ,  $\xi, \psi$  соответственно, причем  $\varphi(\xi, \psi) = 0$ . Требуемые в теореме оценки расстояний  $d(x_0, \xi)$  и  $\mu(y_0, \psi)$  доказываются стандартно.  $\square$

Обозначим далее через  $C(Y)$  совокупность замкнутых подмножеств в  $Y$ . Пусть  $F : X \rightarrow C(Y)$  — многозначное отображение и  $H \subset Y$  — замкнутое подпространство в  $Y$ .

Будем говорить, что график  $\text{Graph}(F)$  отображения  $F$  является  $H$ -полным, если любая фундаментальная последовательность  $\{(x_n, y_n)\} \subset \text{Graph}(F)$ , для которой  $\mu(y_n, H) \rightarrow 0$ , сходится к некоторому элементу  $(\xi, \eta) \in \text{Graph}(F)$ , где  $\mu(\eta, H) = 0$ , т.е.  $\eta \in H$  и, следовательно,  $\xi \in F^{-1}(H) \subseteq X$ .

Будем говорить, что график  $\text{Graph}(F)$  отображения  $F$  является  $H$ -замкнутым, если все предельные точки  $\text{Graph}(F)$  вида  $(\xi, \eta)$ , где  $\eta \in H$ , принадлежат графику  $\text{Graph}(F)$ .

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3** [2, теорема 1]. Пусть  $F : X \rightarrow C(Y)$  — многозначное отображение и  $H \subset Y$  — замкнутое подпространство в  $Y$ . Пусть  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$  и для каждых  $x \in X$  и  $y \in F(x)$  существуют точки  $x' \in X$  и  $y' \in F(x')$ , для которых  $\rho(x, x') \leq \frac{\mu(y, H)}{\alpha}$ ,  $\mu(y, y') \leq \gamma \cdot \mu(y, H)$  и  $\mu(y', H) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mu(y, H)$ . Пусть либо график  $\text{Graph}(F)$  отображения  $F$  является  $H$ -полным, либо пространство  $X \times Y$  полно и график  $\text{Graph}(F)$  является  $H$ -замкнутым. Тогда для каждого  $x_0 \in X$  и каждого  $y_0 \in F(x_0)$  существует начинающаяся из  $x_0$  сходящаяся последовательность  $\{x_m\}_{m=0,1,\dots} \subseteq X$ ,  $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi$ ,  $\xi \in F^{-1}(H)$ , и  $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\mu(y_0, H)}{\alpha - \beta}$ , где  $\xi = \xi(x_0, y_0)$ . Кроме того, существует последовательность  $\{y_m\}, y_m \in F(x_m), m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \eta, \eta \in H \cap F(\xi)$ , причем  $\mu(y_0, \eta) \leq \frac{\gamma\alpha\mu(y_0, H)}{\alpha - \beta}$ .

**Доказательство.** Покажем, что из условий теоремы 3 вытекают условия теоремы 2 при подходящем выборе функционала  $\varphi$ . В самом деле, пусть  $D = \text{Graph}(F) \subseteq X \times Y$  и функционал  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}_+$  определен по правилу  $\varphi(x, y) := \mu(y, H) := \inf_{z \in H} \{\mu(y, z)\}$ . Тогда условия теоремы 3 означают, что для каждой точки  $(x, y) \in D$  существует точка  $(x', y') \in D$ , такая, что  $d(x, x') \leq \alpha^{-1}\varphi(x, y)$ ,  $\mu(y, y') \leq \gamma\varphi(x, y)$  и  $\varphi(x', y') \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x, y)$ .

В соответствии с условиями теоремы построим, как в доказательстве теоремы 2, последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq \text{Graph}(F) = D$ , удовлетворяющую условиям

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{-1}\varphi(x_k, y_k), \quad \mu(y_k, y_{k+1}) \leq \gamma\varphi(x_k, y_k), \quad \varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует, что  $\varphi(x_k, y_k) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \varphi(x_0, y_0)$ ,  $\nu((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) := d(x_k, x_{k+1}) + \mu(y_k, y_{k+1}) \leq K\varphi(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , где  $K = \alpha^{-1} + \gamma$ .

Получаем, что последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq \text{Graph}(F) = D$ , а также последовательности  $\{x_k\}_{k=0,1,\dots}$ ,  $\{y_k\}_{k=0,1,\dots}$  являются фундаментальными. Кроме того, по построению  $\varphi(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Если  $\text{Graph}(F)$   $H$ -полон, то график  $\text{Graph}(\varphi)$  функционала  $\varphi$  является  $\{0\}$ -полным. Если пространство  $X \times Y$  полно и график  $\text{Graph}(F)$   $H$ -замкнут, то график  $\text{Graph}(\varphi)$  функционала  $\varphi$  является  $\{0\}$ -замкнутым. Итак, выполнены все условия теоремы 2, в силу которой  $\varphi(\xi, \eta) = \mu(\eta, H) = 0$ , т.е.  $\eta \in H$  и, следовательно,  $\xi \in F^{-1}(H)$ . Требуемые в теореме 3 оценки расстояний  $d(x_0, \xi)$  и  $\mu(y_0, \eta)$  получаются стандартно.  $\square$

Приведем еще одно следствие из теоремы 2, которое является частным случаем теоремы 3.

Ниже в произведении  $Y^n = Y \times \dots \times Y$  рассматривается метрика  $\hat{\mu}$ , где  $\hat{\mu}(y, z) := \sum_{k=1}^n \mu(y_k, z_k)$  для любых  $y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in Y^n$ .

**Теорема 4** [2, теорема 2]. Пусть  $F_1, \dots, F_n : X \rightarrow C(Y)$ ,  $F = F_1 \times \dots \times F_n : X \rightarrow C(Y^n)$ , причем график  $\text{Graph}(F)$  отображения  $F$  является  $\Delta_n$ -замкнутым, где  $\Delta_n = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n | y_1 = \dots = y_n\}$  — диагональ в  $Y^n$ , и хотя бы один из графиков  $\text{Graph}(F_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , является полным. Пусть числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$ , таковы, что для каждого  $x \in X$  и каждого  $y \in F(x)$  существуют точки  $x' \in X$  и  $y' \in F(x')$ , для которых  $\rho(x, x') \leq \frac{d(y, \Delta_n)}{\alpha}$ ,  $d(y, y') \leq \gamma \cdot d(y, \Delta_n)$

и  $d(y', \Delta_n) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, \Delta_n)$ . Тогда для каждой точки  $x_0 \in X$  существует последовательность  $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ ,  $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi$ ,  $\xi \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$ . При этом  $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{d(y_0, \Delta_n)}{\alpha - \beta}$ ,  $\xi = \xi(x_0, y_0)$ .

**Доказательство.** Покажем, что в условиях теоремы 4 выполнены все условия теоремы 3. Достаточно проверить, что график  $\text{Graph}(F)$  является  $\Delta_n$ -полным. По условиям теоремы 4 график  $\text{Graph}(F)$   $\Delta_n$ -замкнут и хотя бы один из графиков  $\text{Graph}(F_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , является полным. Пусть, например, график  $\text{Graph}(F_1)$  является полным. Это означает, что любая фундаментальная последовательность его элементов сходится к некоторой точке этого графика. Как в доказательстве теоремы 3, построим последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq \text{Graph}(F)$ , удовлетворяющую условиям

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{-1} \varphi(x_k, y_k), \quad \mu(y_k, y_{k+1}) \leq \gamma \varphi(x_k, y_k), \quad \varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \varphi(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь  $y_k = (y_{1k}, \dots, y_{nk})$ ,  $y_{ik} \in F_i(x_k)$ . Получаем, что последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq \text{Graph}(F) = D$ , а также каждая из последовательностей  $\{x_k\}_{k=0,1,\dots}$ ,  $\{y_{ik}\}_{k=0,1,\dots}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , являются фундаментальными. Кроме того, ясно по построению, что  $\varphi(x_k, y_k) := \hat{\mu}(y_k, \Delta_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Здесь

$\hat{\mu}(y_k, \Delta_n) := \inf_{z \in \Delta_n} \{\hat{\mu}(y_k, z)\}$ . Поскольку  $\hat{\mu}(y_k, \Delta_n) := \inf_{z \in Y} \{\sum_{i=1}^n \mu(y_{ik}, z)\}$ , то отсюда следует, что все последовательности  $\{y_{ik}\}_{k=0,1,\dots}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , сближаются при  $k \rightarrow \infty$ . Так как график  $\text{Graph}(F_1)$  является полным, а последовательность  $\{(x_k, y_{1k})\}_{k=0,1,\dots}$  фундаментальна, то она сходится к некоторой точке  $(\xi, \eta) \in \text{Graph}(F_1)$ .

Ввиду того что последовательности  $\{y_{ik}\}_{k=0,1,\dots}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , сближаются, они все сходятся к  $\eta$  и  $(\xi, \eta) \in \bigcap_{i=1}^n \text{Graph}(F_i)$ . Это означает, что  $\xi \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n)$ . Требуемая оценка на расстояние  $d(x_0, \xi)$ , как и в предыдущих теоремах, доказывается стандартно.  $\square$

**2. Основные результаты.** Напомним некоторые определения.

**Определение 3.** Пусть  $X$  — непустое множество,  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $(b_1, b_2)$ -квазиметрикой, а пара  $(X, \rho)$  —  $(b_1, b_2)$ -квазиметрическим пространством, если для любых  $x, y, z \in X$  выполнены следующие условия:

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 3)  $\rho(x, z) \leq b_1 \rho(x, y) + b_2 \rho(y, z)$ .

**Определение 4.** Пусть задано  $s > 0$ . Тогда  $(b_1, b_2)$ -квазиметрика  $\rho$  называется  $s$ -симметрической (симметрической при  $s = 1$ ), если для любых  $x, y \in X$  верно  $\rho(x, y) \leq s \rho(y, x)$ . В этом случае говорят, что  $X$  является  $s$ -симметрическим (симметрическим при  $s = 1$ )  $(b_1, b_2)$ -квазиметрическим пространством.

Ясно, что симметрическое  $(1, 1)$ -квазиметрическое пространство — это обычное метрическое пространство. Легко видеть, что коэффициенты  $b_1, b_2$  в определении 3 не могут быть меньше 1.

В частном случае, когда  $b_1 = b_2 = b$ , симметрическое  $(b_1, b_2)$ -квазиметрическое пространство называется  $b$ -метрическим пространством. На  $b$ -метрические пространства был распространён принцип сжимающих отображений Банаха [6, 7]. Примеры  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств естественно возникают в исследованиях по анализу и геометрии. Целый ряд примеров таких пространств, описание их основных свойств и соответствующие подробные ссылки на литературу даны, например, в [4].

**Определение 5.** Последовательность  $\{x_k\}$  элементов  $(b_1, b_2)$ -квазиметрического пространства  $(X, \rho)$  называется сходящейся к элементу  $a \in X$ , если  $\rho(x_k, a) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Последовательность  $\{x_k\}$  элементов  $(b_1, b_2)$ -квазиметрического пространства  $(X, \rho)$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , что для любых  $n, m \in \mathbb{N}, m \geq n > N$ , верно, что  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ . По аналогии с обычным метрическим пространством  $(b_1, b_2)$ -квазиметрическое пространство  $(X, \rho)$  называется полным, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет (хотя бы один) предел.

Определения  $\{0\}$ -полноты и  $\{0\}$ -замкнутости графика функционала  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , а также определение  $(\alpha, \beta)$ -поискового неотрицательного функционала (относительно соответствующей квазиметрики) для  $(b_1, b_2)$ -квазиметрического пространства в точности такие же, как в случае обычного метрического пространства (см. определения 1, 2).

Сформулируем и докажем аналоги приведенных выше метрических теорем для случая  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для  $(b_1, b_2)$ -квазиметрического пространства.

Перед тем как ее сформулировать, заметим, что поскольку  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$  и, следовательно,  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то очевидно, что существует наименьший показатель  $k_0$ , такой, что для любого  $k, k \geq k_0$ , верно неравенство  $b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k < 1$ .

**Теорема 5.** Пусть  $(X, \rho)$  — полное  $(b_1, b_2)$ -квазиметрическое пространство,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неотрицательный  $(\alpha, \beta)$ -поисковый функционал. Пусть либо график  $\text{Graph}(\varphi)$  функционала  $\varphi$  является 0-полным, либо  $X$  — полное пространство и график  $\text{Graph}(\varphi)$  0-замкнут. Тогда для каждой точки  $x_0 \in X$  существует такая точка  $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$ , что

$$\liminf_{\gamma \rightarrow \xi} \rho(x_0, \gamma) \leq \frac{(b_1)^2 Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1 (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k_0 - 1}}{\alpha \left(1 - b_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)} \varphi(x_0). \tag{*}$$

Если предположить, что квазиметрика  $\rho$  полунепрерывна снизу по второй переменной, то оценка (\*) верна для  $\rho(x_0, \xi) = \liminf_{\gamma \rightarrow \xi} \rho(x_0, \gamma)$ .

**Доказательство.** Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 1, однако с учетом особенностей  $(b_1, b_2)$ -квазиметрики  $\rho$ , отличающих ее от обычной метрики. Как и в доказательстве теоремы 1, построим последовательность точек  $\{x_m\}_{m=0,1,2,\dots}$  в  $X$ , удовлетворяющую следующим условиям: (а)  $\rho(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{\varphi(x_m)}{\alpha}$ ; (б)  $\varphi(x_{m+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \varphi(x_m)$ , причем если точка  $x_m$  уже выбрана и  $\varphi(x_m) = 0$ , то полагаем  $x_j = x_m$  для всех  $j > m$ . Если же  $\varphi(x_m) > 0$ , то согласно условиям теоремы и определению  $(\alpha, \beta)$ -поискового функционала  $\varphi$  (относительно квазиметрики  $\rho$ ) существует точка  $x_{m+1}$ , удовлетворяющая условиям (а) и (б).

Теперь докажем фундаментальность построенной последовательности по отношению к квазиметрике  $\rho$ .<sup>2</sup> Прежде всего заметим, что из условий (а) и (б) следуют неравенства

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{\varphi(x_m)}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \varphi(x_0). \tag{1}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq b_1 \rho(x_n, x_{n+1}) + b_2 \rho(x_{n+1}, x_m) \leq b_1 \rho(x_n, x_{n+1}) + b_2 (b_1 \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + b_2 \rho(x_{n+2}, x_m)) = \\ &= b_1 \rho(x_n, x_{n+1}) + b_2 b_1 \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + (b_2)^2 \rho(x_{n+2}, x_m) \leq \dots \leq b_1 \rho(x_n, x_{n+1}) + \\ &+ b_2 b_1 \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + b_1 (b_2)^2 \rho(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + (b_2)^{m-n-2} b_1 \rho(x_{m-2}, x_{m-1}) + (b_2)^{m-1} \rho(x_{m-1}, x_m). \end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами (1), имеем

$$\alpha \rho(x_n, x_m) \leq b_1 \varphi(x_0) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left[1 + b_2 \frac{\beta}{\alpha} + (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^2 + \dots + (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{m-n-2} + \frac{1}{b_1} \left(b_2 \frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-n-1}\right].$$

Обозначим  $Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k) := 1 + b_2 \frac{\beta}{\alpha} + (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^2 + \dots + (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k-1}$ . Тогда

$$\alpha \rho(x_n, x_m) \leq b_1 \varphi(x_0) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left[Q\left(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, m - n - 1\right) + \frac{1}{b_1} \left(b_2 \frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-n-1}\right]. \tag{2}$$

Для любого  $k \in \mathbb{N}$  обозначим  $\Phi(k) := Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k - 1) + \frac{1}{b_1} (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k-1}$  и положим  $\Phi(0) = 0$ . Тогда из (2) имеем

$$\alpha \rho(x_n, x_m) \leq b_1 \varphi(x_0) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \Phi(m - n). \tag{3}$$

Поскольку  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$  и, следовательно,  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то существует, как отмечено выше, такое наименьшее натуральное  $k_0$ , что для любого  $k \geq k_0$  верно  $b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k < 1$ . Используя существование этого показателя  $k_0$  и разбивая часть построенной последовательности между точками  $x_n$  и  $x_m$  на “куски”, в каждом из которых разность номеров не превосходит  $k_0$ , получаем следующие оценки для

<sup>2</sup>Отметим, что нижеследующее доказательство фундаментальности этой последовательности и оценки (\*) достаточно стандартно и поэтому вполне аналогично рассуждениям в доказательстве теоремы 4.5 работы [4], где строится похожая последовательность.

любых  $n, m \in \mathbb{N}, m > n > N$ . Пусть  $m - n = qk_0 + r$ , где  $r$  — остаток от деления  $m - n$  на  $k_0$ , так что  $0 \leq r < k_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq b_1\rho(x_n, x_{n+k_0}) + b_2\rho(x_{n+k_0}, x_m) \leq \\ &\leq b_1\rho(x_n, x_{n+k_0}) + b_2b_1\rho(x_{n+k_0}, x_{n+2k_0}) + (b_2)^2\rho(x_{n+2k_0}, x_m) \leq \dots \\ \dots &\leq b_1\rho(x_n, x_{n+k_0}) + b_2b_1\rho(x_{n+k_0}, x_{n+2k_0}) + (b_2)^2b_1\rho(x_{n+2k_0}, x_{n+3k_0}) + \dots \\ &\dots + (b_2)^{q-1}b_1\rho(x_{n+(q-1)k_0}, x_{n+qk_0}) + (b_2)^q\rho(x_{n+qk_0}, x_m). \end{aligned} \tag{4}$$

К каждому слагаемому в неравенствах (4) применим оценки вида (3), а именно заметим, что

$$\alpha\rho(x_{n+jk_0}, x_{n+(j+1)k_0}) \leq b_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+jk_0}\Phi(k_0), j = 0, 1, \dots, q-1.$$

Кроме того,

$$\alpha\rho(x_{n+qk_0}, x_m) \leq b_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+qk_0}\Phi(r).$$

Тогда из (4) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha\rho(x_n, x_m) &\leq b_1b_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\Phi(k_0) + b_2b_1b_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k_0}\Phi(k_0) + (b_2)^2b_1b_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+2k_0}\Phi(k_0) + \dots \\ &\dots + b_1(b_2)^{q-1}b_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+(q-1)k_0}\Phi(k_0) + b_2^qb_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+qk_0}\Phi(r). \end{aligned}$$

Далее имеем (используя неравенство  $b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0} < 1$ ):

$$\begin{aligned} \alpha\rho(x_n, x_m) &\leq (b_1)^2\varphi(x_0)\Phi(k_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\left[1 + b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0} + (b_2)^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2k_0} + \dots \right. \\ &\dots + \left.(b_2)^{q-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{(q-1)k_0}\right] + b_2^qb_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+qk_0}\Phi(r) = \\ &= (b_1)^2\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\Phi(k_0)Q\left(b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}, q\right) + b_2^qb_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+qk_0}\Phi(r) \leq \\ &\leq (b_1)^2\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} + b_2^qb_1\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+qk_0}\Phi(r) = \\ &= (b_1)^2\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\left[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} + b_2^q\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{qk_0}(b_1)^{-1}\Phi(r)\right] \leq (b_1)^2\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\left[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} + (b_1)^{-1}\Phi(r)\right]. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получаем

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leq (b_1)^2\varphi(x_0)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\left[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} + (b_1)^{-1}\Phi(r)\right]. \tag{5}$$

Так как  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а остальное выражение в правой части (5) ограничено, то  $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому последовательность  $\{x_m\}$  фундаментальна, а значит, она сходится в полном пространстве  $(X, \rho)$  к некоторому элементу  $\xi \in X$ . Поскольку  $\varphi(x_m) \rightarrow 0$ , то в силу условий теоремы  $\varphi(\xi) = 0$ , т.е.  $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$ .

Далее, из неравенства (5) при  $n = 0$  получается следующее неравенство:

$$\alpha\rho(x_0, x_m) \leq (b_1)^2\varphi(x_0)\left[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} + (b_1)^{-1}\Phi(r)\right]. \tag{6}$$

Если  $m$  делится на  $k_0$ , то  $r = 0$ , а значит, и  $\Phi(r) = 0$  и неравенство (6) приобретает вид

$$\alpha\rho(x_0, x_m) \leq (b_1)^2\varphi(x_0)\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}}. \tag{7}$$

Не предполагая полунепрерывности квазиметрики  $\rho$  ни по одному из аргументов, рассмотрим подпоследовательность  $\{x_{jk_0}\}$  построенной выше последовательности  $\{x_m\}$ . Так как, очевидно, она сходится к  $\xi$ , то получаем из неравенства (7):

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \xi} \rho(x_0, \gamma) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_{jk_0}) \leq \alpha^{-1}(b_1)^2\varphi(x_0)\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} = \\ &= \alpha^{-1}(b_1)^2\varphi(x_0)\frac{Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + \frac{1}{b_1}(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} = \frac{\alpha^{k_0-1}(b_1)^2Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\beta)^{k_0-1}}{\alpha^{k_0} - b_2\beta^{k_0}}\varphi(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим аналог теоремы 2 для  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств.

Пусть  $(X, \rho), (Y, \nu) - (b_1, b_2)$ -квазиметрические пространства.

**Теорема 6.** Пусть  $D \subseteq X \times Y -$  заданное замкнутое подмножество,  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неотрицательный функционал. Пусть для функционала  $\varphi$  и чисел  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$  выполнены следующие условия. Для каждой точки  $(x, y) \in D$  существует точка  $(x', y') \in D$ , такая, что  $\rho(x, x') \leq \alpha^{-1}\varphi(x, y), \nu(y, y') \leq \gamma\varphi(x, y)$  и  $\varphi(x', y') \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x, y)$ . Пусть также либо график  $\text{Graph}(\varphi)$  функционала  $\varphi$  является 0-полным, либо  $D -$  полное пространство относительно  $(b_1, b_2)$ -квазиметрики  $\bar{\rho} : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ , определенной по правилу  $\bar{\rho}((x, y), (x', y')) := \rho(x, x') + \nu(y, y')$ , и график  $\text{Graph}(\varphi)$  0-замкнут.

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in D$  существует последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq D$ , сходящаяся к некоторой точке  $(\xi, \psi) \in D$ , где  $\varphi(\xi, \psi) = 0$ , и справедливы следующие оценки:

$$\liminf_{w \rightarrow \xi} \rho(x_0, w) \leq \frac{(b_1)^2Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\alpha\left(1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)}\varphi(x_0, y_0). \tag{8}$$

$$\liminf_{v \rightarrow \psi} \rho(y_0, v) \leq \gamma\frac{(b_1)^2Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\left(1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)}\varphi(x_0, y_0). \tag{9}$$

**Доказательство.** Зафиксируем начальную точку  $(x_0, y_0) \in D$ . Исходя из условий теоремы, можно построить начинающуюся из этой точки последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots}$ , удовлетворяющую условиям  $\rho(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{-1}\varphi(x_k, y_k), \nu(y_k, y_{k+1}) \leq \gamma\varphi(x_k, y_k)$  и  $\varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k, y_k), k = 0, 1, \dots$ . Отсюда следует, что  $\bar{\rho}((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leq K\varphi(x_k, y_k)$ , где  $K = \alpha^{-1} + \gamma$ . Поэтому имеем

$$\bar{\rho}((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k K\varphi(x_0, y_0).$$

Таким образом, последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots}$ , а также каждая из последовательностей  $\{x_k\}_{k=0,1,\dots}, \{y_k\}_{k=0,1,\dots}$  являются фундаментальными. В силу условий теоремы все они сходятся к некоторым точкам  $(\xi, \psi), \xi, \psi$  соответственно, причем  $\varphi(\xi, \psi) = 0$ . Требуемые в теореме оценки (8) и (9) доказываются вполне аналогично оценке (\*) в теореме 5.  $\square$

Из теоремы 6 вытекает следующее утверждение, которое есть аналог теоремы 3 для  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств.

**Теорема 7.** Пусть  $F : X \rightarrow C(Y) -$  многозначное отображение и либо  $\text{Graph}(F) \subseteq X \times Y$   $H$ -полон, где  $H \subseteq Y -$  замкнутое подпространство в  $Y$ , либо пространство  $X \times Y$  полно и график  $\text{Graph}(F)$   $H$ -замкнут. Пусть, кроме того, заданы числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$ , и для каждой точки  $(x, y) \in \text{Graph}(F)$  существует точка  $(x', y') \in \text{Graph}(F)$ , для которой

$$\rho(x, x') \leq \frac{\nu(y, H)}{\alpha}, \nu(y, y') \leq \gamma\nu(y, H), \nu(y', H) \leq \frac{\beta}{\alpha}\nu(y, H).$$

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in \text{Graph}(F)$  существует последовательность  $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \{0\} \cup \mathbb{N}} \subseteq \text{Graph}(F)$ ,  $(x_k, y_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\xi, \psi) \in \text{Graph}(F)$ , где  $\xi \in F^{-1}(H)$ ,  $\psi \in F(\xi) \cap H$ . Кроме того, верны оценки

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \xi} \rho(x_0, w) &\leq \frac{(b_1)^2 Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1 (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k_0 - 1}}{\alpha \left(1 - b_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)} \nu(y_0, H); \\ \lim_{v \rightarrow \psi} \rho(y_0, v) &\leq \gamma \frac{(b_1)^2 Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1 (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k_0 - 1}}{\left(1 - b_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)} \nu(y_0, H). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Следует рассмотреть функционал  $\varphi(x, y) := \nu(y, H)$  и множество  $D = \text{Graph}(F)$ , зафиксировать любую точку  $(x_0, y_0) \in \text{Graph}(F)$  и применить теорему 6. □

Следующая теорема есть аналог теоремы 4 для  $(b_1, b_2)$ -квазиметрических пространств. Это частный случай теоремы 7. Ниже в произведении  $Y^n = Y \times \dots \times Y$  рассматривается метрика  $\hat{\nu}$ , где  $\hat{\nu}(y, z) := \sum_{k=1}^n \nu(y_k, z_k)$  для любых  $y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in Y^n$ .

**Теорема 8.** Пусть  $F_1, \dots, F_n : X \rightarrow C(Y)$ ,  $F = F_1 \times \dots \times F_n : X \rightarrow C(Y^n)$ , причем график  $\text{Graph}(F)$  отображения  $F$   $\Delta_n$ -замкнут и хотя бы один из графиков  $\text{Graph}(F_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , является полным. Пусть числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$ , таковы, что для любых  $x \in X$ ,  $y \in F(x)$  существуют точки  $x' \in X$  и  $y' \in F(x')$ , для которых  $\rho(x, x') \leq \frac{\hat{\nu}(y, \Delta_n)}{\alpha}$ ,  $\hat{\nu}(y, y') \leq \gamma \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_n)$ , причем  $\hat{\nu}(y', \Delta_n) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_n)$ . Тогда для каждой точки  $(x_0, y_0) = (x_0, (y_{10}, \dots, y_{n0})) \in \text{Graph}(F)$ , т.е.  $y_{i0} \in F_i(x_0), i = 1, \dots, n$ , существует сходящаяся последовательность  $\{(x_k, y_k)\} = \{(x_k, (y_{1k}, \dots, y_{nk}))\}_{k=0,1,\dots}$ , где  $x_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi, y_{ik} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \eta \in Y, i = 1, \dots, n$ , причем точка  $(\xi, (\eta, \dots, \eta)) \in \text{Graph}(F)$ , т.е.  $\xi \in \text{Coin}(F_1, \dots, F_n), \eta \in F_1(\xi) \cap \dots \cap F_n(\xi)$ . Кроме того, верны оценки

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \xi} \rho(x_0, w) &\leq \frac{(b_1)^2 Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1 (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k_0 - 1}}{\alpha \left(1 - b_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)} \nu(y_0, \Delta_n); \\ \lim_{v \rightarrow \eta} \rho(y_0, v) &\leq \gamma \frac{(b_1)^2 Q(b_2 \frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1 (b_2 \frac{\beta}{\alpha})^{k_0 - 1}}{\left(1 - b_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)} \nu(y_0, \Delta_n). \end{aligned}$$

**Предложение 1.** Утверждение теоремы 5.7 из работы [4] следует из теоремы 8 при  $n = 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $(X, \rho), (Y, \nu) - (b_1, b_2)$ -квазиметрические пространства. Пусть  $F_1, F_2 : X \rightarrow C(Y) -$  заданные многозначные отображения, для которых выполнены условия теоремы [4, теорема 5.7], т.е. отображение  $F_1$  является  $\tilde{\alpha}$ -накрывающим и замкнутым (т.е. имеет замкнутый график), а отображение  $F_2$  является  $\tilde{\beta}$ -липшицевым, где  $0 < \tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ , и, кроме того, хотя бы один из графиков  $\text{Graph}(F_1), \text{Graph}(F_2)$  является полным. Покажем, что тогда выполнены все условия теоремы 8 при  $n = 2$ .

Покажем, что  $\text{Graph}(F_1 \times F_2)$  замкнут. В самом деле, так как отображение  $F_2$  является  $\tilde{\beta}$ -липшицевым, то оно секвенциально полунепрерывно сверху. По этой причине для всякой сходящейся последовательности  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\dots} \subseteq \text{Graph}(F_2)$  верно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(y_k, F_2(\xi)) = 0$ , где  $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) \in \text{Graph}(F_2)$ . Итак,  $\text{Graph}(F_2)$  замкнут, а значит, и  $\text{Graph}(F) = \text{Graph}(F_1 \times F_2)$  замкнут. В частности,  $\text{Graph}(F)$  является и  $\Delta_2$ -замкнутым. Пусть теперь  $x \in X -$  произвольная точка и  $y = (y_1, y_2) \in F(x) = (F_1 \times F_2)(x)$ . Поскольку  $F_1 - \tilde{\alpha}$ -накрывающее отображение, то существует точка  $x' \in X$ , такая, что  $\rho(x, x') \leq \frac{\nu(y_1, y_2)}{\tilde{\alpha}} = \frac{\hat{\nu}(y, \Delta_2)}{\tilde{\alpha}}$  и  $y_2 \in F_1(x') \cap F_2(x)$ . Тогда так как  $F_2 - \tilde{\beta}$ -липшицево отображение, то имеем

$$\nu(y_2, F_2(x')) \leq H(F_2(x), F_2(x')) \leq \tilde{\beta} \cdot \rho(x, x') < (\tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \cdot \delta) \cdot \rho(x, x'),$$

где  $\delta -$  любое положительное число,  $H(F_2(x), F_2(x')) = \max\left\{ \sup_{y \in F_2(x)} \{\nu(y, F_2(x))\}, \sup_{z \in F_2(x')} \{\nu(z, F_2(x'))\} \right\} -$  расстояние Хаусдорфа, определяемое квазиметрикой  $\nu$ . Следовательно, существует точка  $y_3 \in F_2(x')$ ,

такая, что  $\nu(y_2, y_3) \leq (\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta) \cdot \rho(x, x')$ . Обозначим  $y' = (y_2, y_3) \in (F_1 \times F_2)(x')$ . Получаем, что

$$\hat{\nu}(y, y') = \nu(y_1, y_2) + \nu(y_2, y_3) \leq \nu(y_1, y_2) + (\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta) \cdot \rho(x, x') \leq \left(1 + \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta}{\tilde{\alpha}}\right) \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2) = \gamma \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2),$$

где  $\gamma = 1 + \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta}{\tilde{\alpha}}$ . Рассмотрим  $\hat{\nu}(y', \Delta_2)$ . Имеем  $\hat{\nu}(y', \Delta_2) = \nu(y_2, y_3) \leq \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta}{\tilde{\alpha}} \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2)$ . Взяв  $\delta$  таким, чтобы  $0 < \delta < 1 - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ , и обозначив  $\alpha = \tilde{\alpha}, \beta = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta$ , получаем, что  $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha, \rho(x, x') \leq \frac{\hat{\nu}(y, \Delta_2)}{\alpha}, \nu(y, y') \leq \gamma \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2)$  и  $\hat{\nu}(y', \Delta_2) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2)$ . Итак, все условия теоремы 8 выполнены.

Пусть теперь  $x_0 \in X$  — произвольная точка и  $\{x_k\}_{k=0,1,\dots}, \{y_k\}_{k=0,1,\dots} = \{(y_{1k}, y_{2k})\}_{k=0,1,\dots}$  — последовательности, построенные в доказательстве теоремы 8 (при  $n = 2$ ),  $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi, \xi = \xi(x_0, y_0)$ .

В силу теоремы 8 имеем  $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{d(y_0, \Delta_2)}{\alpha - \beta}$ , где  $y_0 = (y_{10}, y_{20}) \in (F_1 \times F_2)(x_0)$ . Пусть

$$\hat{\nu}(y_0, \Delta_2) = \hat{\nu}((F_1 \times F_2)(x_0), \Delta_2) \cdot (1 + \eta) = \nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot (1 + \eta),$$

где  $\eta > 0$ . Ясно, что в зависимости от выбора  $y_0$  число  $\eta$  может быть сколь угодно малым. Тогда

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\nu(y_0, \Delta_2)}{\alpha - \beta} = \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot (1 + \eta)}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu)} = \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0))}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} + \varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot (1 + \eta)}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu)} - \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0))}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} = \\ &= \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot \eta}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu)} + \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot \beta \mu}{(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $\mu \rightarrow 0$  и  $\eta \rightarrow 0$ . Отсюда видно, что  $\varepsilon$  можно сделать сколь угодно малым.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко Т.Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Матем. заметки. 2009. **86**, №1. 110–125 (*Fomenko T.N.* Approximation of coincidence points and common fixed points of a collection of mappings of metric spaces // Math. Notes. 2009. **86**, N 1. 107–120).
2. *Фоменко Т.Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Матем. заметки. 2009. **86**, №2. 304–309 (*Fomenko T.N.* Cascade search of the coincidence set of collections of multivalued mappings // Math. Notes. 2009. **86**, N 1–2. 276–281).
3. *Fomenko T.N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of  $n$  one-valued or multi-valued mappings // Topol. and its Appl. 2010. **157**. 760–773.
4. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.*  $(q_1, q_2)$ -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. **82**, №2. 3–32 (*Arutyunov A.V., Greshnov A.V.*  $(q_1, q_2)$ -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // Izv. Math. 2018. **82**, N 2. 245–272. DOI.org/10.1070/IM8546).
5. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, №1. 168–191 (*Fomenko T.N.* Fixed points and coincidences of mapping families between ordered sets and some metrical consequences // Izv. Math. 2019. **83**, N 1. 151–172. DOI.org/10.4213/im8768).
6. *Czerwik S.* Contraction mappings in  $b$ -metric spaces // Acta Math. et Inform. Univ. Ostraviensis. 1993. **1**, N 1. 5–11.
7. *Czerwik S.* Nonlinear set-valued contraction mappings in  $b$ -metric spaces // Atti Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena. 1998. **46**, N 2. 263–276.

Поступила в редакцию  
18.04.2019

УДК 517.928 + 517.984

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ГЛАДКОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В. Е. Владыкина<sup>1</sup>

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля в обобщенной форме с краевыми условиями Дирихле и минимальными условиями на гладкость коэффициентов. Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Для нормированных в  $L^p$  собственных функций установлены равномерные оценки в норме пространства непрерывных функций.

*Ключевые слова:* уравнение Штурма–Лиувилля, асимптотики собственных значений, асимптотики собственных функций, сингулярные коэффициенты.

In this paper we consider the Sturm–Liouville problem in general form with Dirichlet boundary conditions under the minimal smoothness assumptions for the coefficients. We obtain the asymptotics formulas for eigenvalues and eigenfunctions of this problem. In assumption that  $L^p$ -norm of eigenfunctions is equal to 1, we get uniform estimates of the Chebyshev norm.

*Key words:* the Sturm–Liouville equation, asymptotics of the eigenvalues, asymptotics of the eigenfunctions, singular coefficients.

**1. Введение.** Уравнение Штурма–Лиувилля в общей форме обычно записывают в виде

$$-(r(x)y')' + q(x)y = \lambda\rho(x)y, \quad y = y(x), \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — спектральный параметр. Если  $r$  и  $\rho$  — вещественные, положительные, достаточно гладкие функции, то замены (преобразование Лиувилля)

$$t(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{r(\xi)}} d\xi,$$

$$z(t) = f(t)y(x(t)), \quad f(t) = \sqrt[4]{\rho(x(t))r(x(t))}$$

приводят уравнение (1) к нормальной форме (см., например, [1]):

$$z'' + Q(t)z = \lambda z, \quad z = z(t), \quad \text{где } Q(t) = \frac{q(x(t))}{r(x(t))} + \frac{f''(t)}{f(t)}. \quad (2)$$

Для уравнения (1) может быть поставлена спектральная задача, т.е. на концах интервала  $(a, b)$  предполагаются выполненными краевые условия. В случае конечного интервала ставятся два краевых условия, например условия Дирихле

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (D)$$

При таких краевых условиях получаем задачу Дирихле на отрезке  $[0, h]$ , где  $h = t(b)$ , для уравнения (2). Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевых задач для канонического уравнения (2) хорошо известны (см., например, [2, гл. 1; 3, гл. 2]). В частности, в случае краевых условий Дирихле собственные значения и собственные функции имеют асимптотику

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{h} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad z_n = \sin \frac{\pi n t}{h} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

<sup>1</sup>Владыкина Вероника Евгеньевна — ассист. каф. фундаментальной и прикладной математики ф-та космических исследований МГУ, e-mail: vika-chan@mail.ru.

Vladykina Veronika Evgen'evna — Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Cosmic Research, Chair of Fundamental and Applied Mathematics.

Предположение о гладкости коэффициентов  $r, \rho, q$  в (1) при использовании преобразования Лиувилля существенно. Для получения асимптотик (3) необходимо требовать условия

$$r, \rho \in W^{2,1}[a, b], \quad q \in L^1[a, b], \quad (C)$$

где  $W^{k,p}$  — пространство Соболева, состоящее из функций  $y$ , для которых  $y, y', \dots, y^{(k-1)}$  абсолютно непрерывны, а  $y^{(k)} \in L^p[a, b]$ ,  $\rho \geq 1$ .

Наша цель — получить асимптотические формулы задачи на собственные значения для уравнения (1) при минимальной гладкости коэффициентов, более того, мы допускаем, что функция  $q$  является распределением первого порядка сингулярности. В случае  $r(x) \equiv \rho(x) \equiv 1$  соответствующие результаты были получены в работе [4]. Кроме того, нами будут установлены равномерные оценки нормированных в  $L^p$  собственных функций в чебышёвской норме.

**2. Асимптотика собственных значений и собственных функций.** Далее вместо (1) рассмотрим более общее уравнение в более удобной для нас форме:

$$-(r^2 y')' + \rho y' + qy = \lambda^2 \rho^2 y, \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad (4)$$

где  $r$  и  $\rho$  — абсолютно непрерывные, положительные функции, а  $\rho$  и  $q$  — комплекснозначные, причем

$$\rho \in L^1[a, b], \quad q \in W^{-1,2}[a, b]. \quad (5)$$

Последнее условие означает, что первообразная  $u = \int q dx$ , понимаемая в смысле теории распределений, принадлежит пространству  $L^2[a, b]$ .

Кроме того, предположим, что

$$\rho' u, r u, \rho u \in L_1[a, b], \quad \text{где } u = \int q dx. \quad (6)$$

Конечно, эти условия на коэффициенты существенно менее ограничительны, нежели условия (C), требуемые для проведения преобразования Лиувилля. Однако платой за меньшую гладкость коэффициентов будет менее точная оценка остатка в асимптотических формулах. Для простоты изложения далее ограничимся рассмотрением задачи Дирихле для уравнения (4).

Основным инструментом при получении асимптотических формул для спектральных характеристик будет служить следующий результат [5, 6].

**Теорема [6].** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5) и (6). Тогда для любого  $s > 0$  фундаментальные решения задачи (4) представимы в виде

$$y_{\pm}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right) (1 + \varphi_{\pm}(x, \lambda)). \quad (7)$$

Здесь функции  $\varphi_{\pm}$  аналитические в полуплоскости  $\Pi_s^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \lambda \geq -s\}$  при  $|\lambda| > R$  и

$$|\varphi_+(x, \lambda)| + |\varphi_-(x, \lambda)| = o(1) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in \Pi_s^+,$$

равномерно по  $x \in [a, b]$ . Асимптотики (7) можно почленно дифференцировать, если вместо производной рассматривать квазипроизводную

$$y^{[1]} = y' - h(x) \frac{\rho}{r} y, \quad \text{где } h = \int \frac{q}{r\rho} dx,$$

а именно:

$$y_{\pm}^{[1]}(x, \lambda) = \pm i\lambda \sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right) (1 + \psi_{\pm}(x, \lambda)), \quad (8)$$

где функции  $\psi_{\pm}$  обладают тем же свойством, что и функции  $\varphi_{\pm}$ . Утверждение теоремы сохраняется, если вместо полуплоскости  $\Pi_s^+$  рассматривать полуплоскость  $\Pi_s^- = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \lambda \leq s\}$ .

Из этого результата следует

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда собственные значения задачи (4), (D) имеют вид

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{h^2} (1 + o(1/k)), \quad \text{где } h = \int_a^b \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)} d\xi.$$

**Доказательство.** Рассмотрим полуплоскость  $\Pi_s^+$  (для полуплоскости  $\Pi_s^-$  рассуждения аналогичны). Собственные значения являются корнями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) U_2(y_1) \\ U_1(y_2) U_2(y_2) \end{vmatrix},$$

где  $U_j(y)$ ,  $j = 1, 2$ , обозначают краевые условия. Для удобства обозначим

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}}, \quad P(x) = e^{\frac{1}{2} \int_a^x pr^{-2}}, \quad t(x) = \int_a^x \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)} d\xi, \quad h = t(b).$$

Составим характеристический определитель задачи (4) с краевыми условиями Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} R(a)(1+o(1)) & R(b)P(b) \exp(i\lambda h)(1+o(1)) \\ R(a)(1+o(1)) & R(b)P(b) \exp(-i\lambda h)(1+o(1)) \end{vmatrix} = \\ &= R(a)R(b)P(b) \left( e^{-i\lambda h}(1+o(1)) - e^{i\lambda h}(1+o(1)) \right). \end{aligned}$$

Корни характеристического определителя являются корнями уравнения

$$e^{-i\lambda h}(1+\alpha(\lambda)) - e^{i\lambda h}(1+\beta(\lambda)) = 0,$$

где  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  стремятся к нулю при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим  $\lambda_k^0 = \frac{\pi k}{h}$  — корни уравнения  $e^{-i\lambda h} - e^{i\lambda h} = 0$  и воспользуемся теоремой Руше. Для этого построим окружности радиуса  $r_k$  около  $\lambda_k^0$  начиная с  $k = K$ , такого, чтобы при  $|\lambda| > \lambda_{K-1}^0$  были верны оценки  $|\alpha(\lambda)| < \min\{1, \frac{\pi}{2h}\}$ ,  $|\beta(\lambda)| < \min\{1, \frac{\pi}{2h}\}$ . Числа  $r_k$  будем брать такими, чтобы были верны оценки  $|\alpha(\lambda)| < \frac{1}{2}r_k h$ ,  $|\beta(\lambda)| < \frac{1}{2}r_k h$  в кольце  $\lambda_k^0 - 1 < |\lambda| < \lambda_k^0 + 1$ . Очевидно, можно выбрать последовательность радиусов  $r_k$  стремящейся к нулю. Тогда на окружности  $|\lambda - \lambda_k^0| = r_k$  будут выполнены оценки  $|e^{-i\lambda h} - e^{i\lambda h}| \geq r_k h$ ,  $|e^{-i\lambda h}\alpha(\lambda) - e^{i\lambda h}\beta(\lambda)| < r_k h$ . Значит, внутри каждого круга  $|\lambda - \lambda_k^0| < r_k$  лежит один корень  $\Delta(\lambda)$  кратности 1. Таким образом, мы получили серию  $\{\lambda_k\}_{k=K}^\infty$  корней характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$ . Покажем, что незанумерованными остались ровно  $K - 1$  корней. Для этого рассмотрим окружность  $|\lambda| = \lambda_k^0 + \frac{\pi}{2h}$  при  $k \geq K - 1$ . Тогда на этой окружности  $|e^{-i\lambda h} - e^{i\lambda h}| = 2$ ,  $|e^{-i\lambda h}\alpha(\lambda) - e^{i\lambda h}\beta(\lambda)| < 2$ , значит, по теореме Руше  $\Delta(\lambda)$  имеет внутри каждого такого круга ровно  $k$  корней. Таким образом,

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{h} + o(1), \tag{9}$$

и теорема доказана.

Теперь мы можем получить асимптотики собственных функций нашей задачи.

**Теорема 2.** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда собственные функции задачи (4), (D) имеют вид

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} e^{\frac{1}{2} \int_a^x pr^{-2}} \sin\left(\frac{\pi k}{h} \int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1), \quad \text{где } h = \int_a^b \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)} d\xi. \tag{10}$$

**Доказательство.** Найдем  $y_k$  по формуле

$$\begin{aligned} y_k &= \begin{vmatrix} U_1(y_1) y_1 \\ U_1(y_2) y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R(a)(1+o(1)) & R(x)P(x)e^{i\lambda_k t(x)}(1+o(1)) \\ R(a)(1+o(1)) & R(x)P(x)e^{-i\lambda_k t(x)}(1+o(1)) \end{vmatrix} = \\ &= R(a)R(x)P(x) \left( e^{-i\lambda_k t(x)}(1+o(1)) - e^{i\lambda_k t(x)}(1+o(1)) \right). \end{aligned}$$

С учетом (9) имеем

$$e^{\lambda_k} = e^{\lambda_k^0 + o(1)} = e^{\lambda_k^0}(1 + o(1)).$$

Тогда с точностью до умножения на константу

$$y_k = R(x)P(x) \left( \sin \lambda_k^0 t(x) + e^{-i\lambda_k^0 t(x)} o(1) + e^{i\lambda_k^0 t(x)} o(1) \right).$$

Поскольку  $\lambda_k^0 = \frac{\pi k}{h}$ , то  $\left| e^{i\lambda_k^0 t(x)} \right| = 1$ , а значит,

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} e^{\frac{1}{2} \int_a^x \rho r^{-2}} \sin \left( \frac{\pi k}{h} \int_a^x \rho r^{-1} \right) + o(1),$$

и теорема доказана.

Заметим, что по сравнению с асимптотиками для задачи с гладкими коэффициентами (3) остаточный член в асимптотических формулах (9) и (10) менее точен ( $o(1)$  вместо  $O(1/n)$ ).

**3. Равномерные оценки нормированных в  $L^p$  собственных функций.** Здесь будут получены равномерные оценки норм собственных функций задачи (4) с краевыми условиями Дирихле.

В случае  $q \equiv 0, \rho \equiv r \equiv 1$  в работе [7] для непрерывных весов  $\rho$  была установлена точная оценка для нормированных в  $L^2$  собственных функций задачи (4), (D):

$$\|y_n\|_{C[0;1]} \leq C(\rho) \lambda_n^{1/2} \|y_n\|_{L^2[0;1]}.$$

Позднее в [8] рассматривались непрерывные веса  $\rho$  ограниченной вариации. И для собственных функций задачи (4), (D) была получена равномерная по  $n$  оценка

$$\|y_n\|_{C[0;1]} \leq C(\rho) \|y_n\|_{L^2[0;1]}.$$

Применяемый в [8] подход основан на использовании квадратичных форм, что не позволяет обобщить его на случай  $\rho \geq 1$ . Поэтому для получения интересующих нас оценок будут использованы асимптотики собственных функций при  $\rho \in AC[0;1]$ .

**Теорема 3.** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда для собственных функций  $y_n$  задачи (4), (D) верна равномерная по  $n$  оценка

$$\|y_n\|_{C[a,b]} \leq C \|y_n\|_{L^p[a,b]}, \quad \forall \rho > 1.$$

**Доказательство.** Согласно теореме 2 собственные функции задачи имеют асимптотики (10).

Выберем число  $N$  так, чтобы при  $n > N$  была верна оценка  $|o(1)| < \varepsilon$ . Функции  $r$  и  $\rho$  отделены от нуля на отрезке  $[a, b]$ . Обозначим

$$M = \max \left\{ \max_{x \in [a,b]} r(x), \max_{x \in [a,b]} \rho(x) \right\}, \quad m = \min \left\{ \min_{x \in [a,b]} r(x), \min_{x \in [a,b]} \rho(x) \right\}.$$

Тогда при  $n > N$  можно оценить в равномерной норме собственные функции  $y_n$ :

$$\|y_n\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{m} e^{\frac{1}{2} \|p\|_{L_1[a,b]}} + \varepsilon.$$

Теперь получим оценку собственных функций по норме  $L_1$ :

$$\begin{aligned} \|y_n\|_{L_1[0,1]} &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}} e^{\frac{1}{2} \int_a^x \rho r^{-2}} \left| \sin \left( \frac{\pi k}{h} \int_a^x \rho r^{-1} \right) \right| + |o(1)| dx \geq \\ &\geq \frac{1}{M} e^{-\frac{\|p\|_{L_1[a,b]}}{2M^2}} \int_a^b \left| \sin \left( \frac{\pi k}{h} \int_a^x \rho r^{-1} \right) \right| dx - \varepsilon(b-a) = \left[ t = \int_a^x \rho r^{-1} \right] = \\ &= \frac{1}{M} e^{-\frac{\|p\|_{L_1[a,b]}}{2M^2}} \int_0^h \left| \sin \left( \frac{\pi k}{h} t \right) \right| \frac{r}{\rho} dx - \varepsilon(b-a) \geq \frac{2hm}{M^2\pi} e^{-\frac{\|p\|_{L_1[a,b]}}{2M^2}} - \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Выберем число  $\varepsilon$  так, чтобы последняя разность была положительна. Тогда существуют  $C_1, C_2 > 0$ , такие, что  $\|y_n\|_{C[0,1]} \leq C_1$ ,  $\|y_n\|_{L_1[0,1]} \geq C_2$  при  $n > N$ , а значит, можно выбрать не зависящую от  $n$  константу  $C$ , такую, что

$$\|y_n\|_{C[a,b]} \leq C \|y_n\|_{L_1[a,b]}.$$

Из этой оценки и неравенства Гёльдера сразу следует утверждение теоремы.

**4. Задача с регулярными краевыми условиями.** Рассмотрим задачу (4) с краевыми условиями:

$$U_j(y) = \alpha_{j0}y(a) + \alpha_{j1}y^{[1]}(a) + \beta_{j0}y(b) + \beta_{j1}y^{[1]}(b) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Число  $\nu_j$  называется порядком линейной формы вида (11), если по меньшей мере один из коэффициентов при  $y^{(\nu_j)}(a)$  или  $y^{(\nu_j)}(b)$  отличен от нуля, а все коэффициенты при производных порядка  $k > \nu_j$  равны нулю. Суммарным порядком краевых условий вида (11) называется число  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ . Краевые условия называются нормированными, если любые их линейные комбинации имеют не меньший суммарный порядок (далее считаем краевые условия (11) нормированными). Здесь мы заимствуем определение регулярности краевых условий из работы [9], которое (для случая, когда коэффициенты уравнения — классические функции) эквивалентно известному определению из книги М.А. Наймарка [3, гл. 2].

Действуя аналогично [3, гл. 2], определим числа  $\theta_1, \theta_0, \theta_{-1}$  с помощью равенства

$$\left| \begin{matrix} (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + sp_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_1^{\nu_1} & (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + \frac{1}{s}p_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_2^{\nu_1} \\ (p_{\nu_2}(a)\alpha_{2\nu_2} + sp_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_1^{\nu_2} & (p_{\nu_2}(a)\alpha_{2\nu_2} + \frac{1}{s}p_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_2^{\nu_2} \end{matrix} \right| = \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s,$$

где  $p_0(x) = R(x)P(x)$ ,  $p_1(x) = \frac{P(x)}{R(x)r^2(x)}$ ,  $\omega_1 = i$ ,  $\omega_2 = -i$ . Краевые условия будем называть регулярными, если числа  $\theta_1$  и  $\theta_{-1}$  отличны от нуля.

Комбинируя рассуждения из п. 2 настоящей работы и монографии [3, гл. 2, §4] и используя (7) и (8), получаем следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда собственные значения задачи (4), (11) образуют две последовательности

$$\lambda_{1,k}^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i \ln_0 \xi'}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

$$\lambda_{2,k}^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i \ln_0 \xi''}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

где  $\xi', \xi''$  — корни уравнения  $\theta_1 s^2 + \theta_0 s + \theta_{-1} = 0$ , возможно, совпадающие. При этом в случае  $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$  все собственные значения начиная с некоторого простые, а в случае  $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$  — простые или двукратные.

**Теорема 5.** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5), (6), и пусть  $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ . Тогда собственные функции задачи (4), (11) образуют две последовательности

$$y_{1,k} = p_0(x)(-i)^{\nu_2} e^{i\lambda_{1,k} t(x)} \left( \alpha_{2\nu_2} p_{\nu_2}(a) + \frac{1}{\xi'} \beta_{2\nu_2} p_{\nu_2}(b) + o(1) \right) -$$

$$- p_0(x) i^{\nu_2} e^{-i\lambda_{1,k} t(x)} \left( \alpha_{2\nu_2} p_{\nu_2}(a) + \xi' \beta_{2\nu_2} p_{\nu_2}(b) + o(1) \right), \quad (12)$$

где

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)r(x)}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_a^x \frac{p}{r^2}\right), \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{p}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_a^x \frac{p}{r^2}\right), \quad t(x) = \int_a^x \frac{p}{r},$$

а формула для  $y_{2,k}$  получается из (12) заменой  $\xi'$  на  $\xi''$  и  $\lambda_{1,k}$  на  $\lambda_{2,k}$ .

Повторяя доказательство теоремы 3, получаем следующий результат.

**Теорема 6.** Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям (5), (6), и пусть  $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ . Тогда существует  $C > 0$ , такое, что для всех собственных функций  $y_n$  задачи (4), (11) верна оценка

$$\|y_n\|_{C[a,b]} \leq C \|y_n\|_{L^p[a,b]}, \quad \forall p > 1.$$

Автор приносит благодарность профессору А. А. Шкаликову за постановку задачи и замечание о том, что без требования условия сильной регулярности ( $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ ) асимптотические формулы (12) для собственных функций могут не сохраняться (этот факт в [3] не отмечен).

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФ, № 17-11-01215.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fulton C.T., Pruess S., Xie Yu.* The automatic classification of Sturm–Liouville problems // *J. Appl. Math. Comput.* 2005. **124**. 149–186.
2. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010.
4. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // *Тр. Моск. матем. о-ва.* 2003. **64**. 159–212.
5. *Shkalikov A.A., Vladykina V.E.* Asymptotics of the solutions of the Sturm–Liouville equation with singular coefficients // *Math. Notes.* 2015. **99**, N 5. 891–899.
6. *Владыкина В.Е.* Асимптотика фундаментальных решений уравнения Штурма–Лиувилля по спектральному параметру // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2019. № 1. 57–61.
7. *Якубов В.Я.* Неклассические двусторонние точные оценки для нормированных собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 1993. № 4. 37–44.
8. *Якубов В.Я.* Ограниченность нормированных собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при минимальных ограничениях на гладкость коэффициентов // *Дифференц. уравнения.* 1994. **30**, № 8. 1465–1467.
9. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // *Тр. Семинара им. И.Г. Петровского.* 1983. **9**. 190–229.

Поступила в редакцию  
12.04.2019

## Механика

УДК 517.01+531.01

**ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ****М. В. Шамолин<sup>1</sup>**

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля, обладающие переменной диссипацией, обобщают ранее рассмотренные.

*Ключевые слова:* динамические уравнения, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

In this study, we show the integrability of certain classes of dynamic systems on the tangent bundle to a multi-dimensional manifold. In this case, the force fields have variable dissipation and generalize the cases considered previously.

*Key words:* dynamic equations, integrability, transcendental first integral.

В задачах динамики исследуются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение  $n$ -мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к  $(n - 1)$ -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в плане присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В настоящей работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4 см. [3–5]). При этом силовые поля, обладающие так называемой переменной диссипацией, обобщают ранее рассмотренные.

**1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы.** Как известно, в случае  $n$ -мерного гладкого риманова многообразия  $M^n$  с координатами  $(\alpha, \beta)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ , и аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i(x)$  уравнения геодезических линий на касательном расслоении

$$T_*M^n\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_{n-1}; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}, \quad \alpha = x^1, \quad \beta_1 = x^2, \quad \dots, \quad \beta_{n-1} = x^n, \quad x = (x^1, \dots, x^n)$$

имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\dot{x}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении  $T_*M^n$ . Рассмотрим зависящую от точки  $x$  многообразия замену координат касательного пространства

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n R^{ij}(x) z_j, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Шамолин Максим Владимирович — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.

Shamolin Maxim Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientist, Lomonosov Moscow State University Institute of Mechanics.

которую почти всюду можно обратить:  $z_j = \sum_{i=1}^n T_{ji}(x)\dot{x}^i$ , при этом  $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \dots, n$ , — функции от  $x^1, \dots, x^n$ , а также  $RT = E$ , где  $R = (R^{ij}), T = (T_{ji})$ . Назовем уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении  $T_*M^n$ .

Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^n \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^n T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^n T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3}$$

где  $T_{ji,k} = \partial T_{ji} / \partial x^k, j, i, k = 1, \dots, n$ . Подставляя в (3) уравнения (1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^n T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^n T_{ij}\Gamma_{pq}^j\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{4}$$

при этом в системе (4) вместо  $\dot{x}^i, i = 1, \dots, n$ , следует подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^n Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(2)} = 0, \quad Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^n T_{is}(x)\Gamma_{jk}^s(x) - T_{ij,k}(x).$$

**Предложение 1.** Система (1) в той области, где  $\det R(x) \neq 0$ , эквивалентна составной системе (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности  $\Gamma_{jk}^i(x)$ .

**2. Важный частный случай.** Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_n, \\ \dot{\beta}_1 &= z_{n-1}f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\beta}_{n-1} &= z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \cdot \dots \cdot i_1(\beta_{n-2}), \end{aligned} \tag{5}$$

где  $f_k(\alpha), k = 1, \dots, n - 1; g_l(\beta_1), l = 1, \dots, n - 2; h_m(\beta_2), m = 1, \dots, n - 3; \dots; i_1(\beta_{n-2})$  — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты  $z_1, \dots, z_n$  в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических [6, 7] (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с  $n(n - 1)$  ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1,n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1,n-1}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 + \dots \\ \dots + \Gamma_{n-1,n-1}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{\alpha,n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{1,n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \dots \\ \dots + 2\Gamma_{n-3,n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \dots + 2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (5) уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] z_1 z_n - \left[ 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\ &- \left[ 2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2) \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \dots \\ &\dots - \left[ 2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \cdot \dots \cdot r_1(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha) \right] z_2 z_n - \left[ 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1) \right] f_1(\alpha) z_2 z_{n-1} - \dots \\ &\dots - \left[ 2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3}) \right] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \cdot \dots \cdot s_1(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\ &- \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \cdot \dots \cdot \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] z_{n-1} z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \dots \\ &\dots - \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ \dot{z}_n &= \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \end{aligned} \tag{7}$$

здесь  $DQ(q) = d \ln |Q(q)|/dq$ , и уравнения (6) почти всюду эквивалентны составной системе (5), (7) на касательном расслоении  $T_*M^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ .

Для полного интегрирования системы (5), (7) необходимо знать, вообще говоря,  $2n - 1$  независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

**Предложение 2.** *Если всюду на своей области определения справедлива система  $n(n - 1)/2$  равенств*

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) &\equiv 0, \\ \dots \\ 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) &\equiv 0, \\ \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) &\equiv 0, \\ \dots \\ \left[ 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) &\equiv 0, \\ \dots \\ \left[ 2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\ + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{8}$$

то система (5), (7) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{9}$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (9) не “заслуживает” решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (8) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). Можно даже доказывать отдельную теорему существования решения  $f_k(\alpha), k = 1, \dots, n - 1, g_l(\beta_1), l = 1, \dots, n - 2, h_m(\beta_2), m = 1, \dots, n - 3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$  системы (8) квазилинейных уравнений с целью выявления наличия аналитического первого интеграла (9) для системы (5), (7) уравнений геодезических (6). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (8) нам не потребуется. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \dots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{10}$$

при этом функции  $g_l(\beta_1), l = 1, \dots, n-2, h_m(\beta_2), m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$  должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (8):

$$\begin{aligned}
 & 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & 2\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha, \beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & 2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot r_1^2(\beta_{n-3}) + \\
 & \quad + \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, функции  $g_l(\beta_1), l = 1, \dots, n-2, h_m(\beta_2), m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$  зависят от коэффициентов связности через систему (11), а ограничения на функцию  $f(\alpha)$  будут даны ниже.

**Предложение 3.** *Если выполнены условия (10), (11) и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \dots = \Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{13}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}.$$

**Предложение 4.** *Если выполнены условия предложения 3, а также*

$$g_1(\beta_1) = \dots = g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1) \tag{14}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \dots = \Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_{n-2}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \tag{16}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

**Предложение 5.** *Если выполнены условия предложений 3, 4, ... и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{17}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_n(z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = z_1 \Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) \cdot \dots \cdot \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}, \tag{18}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2}) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}, \quad i(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}).$$

**Предложение 6.** Если выполнены условия предложений 3, 4, ..., а также предложения 5, то система (5), (7) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2}, \dots, z_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Phi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const.} \quad (19)$$

Набор первых интегралов (9), (13), (16), ..., а также (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (5), (7) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из  $n + 1$ , а не из  $2n - 1$  первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (18) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [8]).

**3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы.** Теперь, несколько модифицировав систему (5), (7) при условиях (10)–(12), (14), (15), ..., а также (17), получим систему консервативную. А именно наличие силового поля характеризуется достаточно гладким коэффициентом  $F(\alpha)$  во втором уравнении системы (20). Рассматриваемая система на касательном расслоении  $T^*M^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_n, \\ \dot{z}_n &= F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \dots \\ &\quad \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ \dot{z}_{n-1} &= [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_{n-1} z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \dots \\ &\quad \dots - \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \dot{z}_2 &= [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \dots \\ &\quad \dots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \cdot \dots \cdot s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\ &\quad - \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \cdot \dots \cdot r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ \dot{z}_1 &= [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\ &\quad - [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \dots \\ &\quad \dots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \cdot \dots \cdot r(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \\ \dot{\beta}_1 &= z_{n-1} f(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \dot{\beta}_{n-1} &= z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \cdot \dots \cdot i(\beta_{n-2}), \end{aligned} \quad (20)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \\ + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-2} + \dots \\ \dots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) \dot{\beta}_{n-3} \dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-1} + \dots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) \dot{\beta}_{n-2} \dot{\beta}_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

**Предложение 7.** Если выполнены условия предложения 2, то система (20) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_n^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b) db. \quad (21)$$

**Предложение 8.** Если выполнены условия предложений 3, 4, ..., а также предложения 5, то система (20) имеет гладкие первые интегралы вида (13), (16), ..., а также (18).

**Предложение 9.** Если выполнены условия предложения 6, то система (20) имеет первый интеграл вида (19).

Набор первых интегралов (21), (13), (16), ..., а также (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (20) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из  $n + 1$ , а не из  $2n - 1$  первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (19) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [8]).

**4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы.** Теперь усложним систему (20) и получим систему с диссипацией. А именно наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризуется достаточно гладким коэффициентом  $b\delta(\alpha)$  в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_n + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_n &= F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \dots \\ &\quad \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i^2(\beta_{n-2})z_1^2, \\ \dot{z}_{n-1} &= [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \dots \\ &\quad \dots - \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \cdot \dots \cdot i^2(\beta_{n-2})z_1^2, \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \dot{z}_2 &= [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \dots \\ &\quad \dots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \cdot \dots \cdot s(\beta_{n-4})z_2z_3 - \\ &\quad - \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \cdot \dots \cdot r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2, \\ \dot{z}_1 &= [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f_1(\alpha)z_1z_{n-1} - \\ &\quad - [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \dots \\ &\quad \dots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \cdot \dots \cdot r(\beta_{n-3})z_1z_2, \\ \dot{\beta}_1 &= z_{n-1}f(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \dot{\beta}_{n-1} &= z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \cdot \dots \cdot i(\beta_{n-2}), \end{aligned} \quad (22)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \dot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \dot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \\ + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ \dot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\ + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \dots & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ & \dot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \dots \\ & \dots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

здесь  $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$ .

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (22) порядка  $2n$  при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv \dots \equiv \Gamma_{n-1,n-1}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots = \Gamma_n(\alpha). \tag{23}$$

Введем (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию  $f(\alpha)$ : она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (8):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{24}$$

Для полного интегрирования системы (22) необходимо знать, вообще говоря,  $2n-1$  независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{aligned} w_n &= z_n, & w_{n-1} &= \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, & w_{n-2} &= \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} &= \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, & \dots, & & w_1 &= \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_2^{n-2}}} \end{aligned}$$

система (22) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -w_n + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n &= F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2, \\ \dot{w}_{n-1} &= \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] w_{n-1}w_n; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_s &= \pm w_{n-1} \sqrt{1 + w_s^2} f(\alpha) \dots [2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \dot{\beta}_s &= \pm \frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_s^2}} f(\alpha) \dots, & s &= 1, \dots, n-2; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_{n-2}^2}} f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \cdot \dots \cdot i(\beta_{n-2}), \tag{27}$$

где в системе (26) символом “...” показаны одинаковые члены, а функция  $j(\beta_s)$  — одна из функций  $g, h, \dots$ , зависящая от соответствующего угла  $\beta_s$ .

Видно, что для полной интегрируемости системы (25)–(27) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (25) — по одному для систем (26) (меняя в них независимые переменные; их  $n-2$  штуки) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (27) (т.е. всего  $n+1$ ).

**Теорема.** Пусть для некоторых  $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$  выполняются равенства

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{28}$$

Тогда система (22) при выполнении условий (23), (24) обладает полным набором  $(n+1)$  независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Для начала сопоставим системе третьего порядка (25) неавтономную систему второго порядка:

$$\frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \quad \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]w_{n-1}w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \tag{29}$$

Далее, введя однородные переменные по формулам  $w_n = u_n \delta(\alpha)$ ,  $w_{n-1} = u_{n-1} \delta(\alpha)$ , представим систему (29) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) \frac{du_n}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha) u_n^2 - b \delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_{n-1} u_n + \delta'(\alpha) u_{n-1} u_n - b \delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ F_3(\alpha) &= \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \end{aligned} \quad (30)$$

А с учетом условий (28) система (30) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \kappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - b u_n}{(1 - \kappa) u_{n-1} u_n - b u_n}. \quad (31)$$

Уравнение (31) имеет вид уравнения Абеля [9]. В частности, при  $\kappa = -1$  оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - b u_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \text{const}, \quad (32)$$

который в прежних переменных выглядит так:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1 \left( \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)} \right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b w_n \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_{n-1} \delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (33)$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (25) при  $\kappa = -1$ . Для этого преобразуем инвариантное соотношение (32) при  $u_{n-1} \neq 0$  следующим образом:

$$\left( u_n - \frac{b}{2} \right)^2 + \left( u_{n-1} - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \quad (34)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения удовлетворяют условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \quad (35)$$

тогда фазовое пространство системы (21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (34).

Таким образом, в силу соотношения (32) первое уравнение системы (30) при  $\kappa = -1$  примет вид

$$\frac{\delta(\alpha) du_n}{\delta'(\alpha) d\alpha} = \frac{2(\lambda - b u_n + u_n^2) - C_1 U_1(C_1, u_n)}{-u_n + b}, \quad U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2} \{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - b u_n + \lambda)} \},$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (35).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (25) будет иметь следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2 \left( \delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const} \quad (36)$$

и при  $\kappa = -1$  его можно найти из квадратуры

$$\ln |g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_n) du_n}{2(\lambda - b u_n + u_n^2) - C_1 \{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - b u_n + \lambda)} \} / 2}, \quad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо  $C_1$  можно подставить равенство (33). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции  $\delta(\alpha)$ . Поэтому выражение первых интегралов (33), (36) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от квадратур, но и от явного вида функции  $\delta(\alpha)$ .

Первые интегралы для систем (26) запишутся следующим образом:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-2 \tag{37}$$

(о функциях  $\Psi_s(\beta_s)$ ,  $s = 1, \dots, n-2$ , см. (16), ..., а также (18)). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (27), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const},$$

при этом после взятия последнего интеграла вместо постоянных  $C_{n-1}$ ,  $C_n$  можно подставить соответствующие левые части равенства (37).

**5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией.** Если  $\alpha$  – периодическая координата периода  $2\pi$ , то система (25) становится динамической системой, обладающей переменной диссипацией с нулевым средним [1–5]. При  $b = 0$  она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (21), (13). В силу (28)

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_n^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b) db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda \delta^2(\alpha), \tag{38}$$

где “ $\cong$ ” означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом ввиду (24) и (28) имеем

$$\Phi_2(z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} \cong w_{n-1} \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{39}$$

где “ $\cong$ ” означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (38), (39) (или (21), (13)) также является первым интегралом системы (25) при  $b = 0$ . Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - b w_n \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha) \tag{40}$$

и (39) по отдельности не является первым интегралом системы (25). Однако отношение функций (40), (39) является первым интегралом системы (25) (при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b$ .

Вообще же для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов обусловлена имеющимися в системе притягивающими или отталкивающими предельными множествами [10].

**6. Некоторые приложения.** По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции  $f(\alpha)$ , определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \tag{41}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \tag{42}$$

Случай (41) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного  $(n + 1)$ -мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [11]. Случай (42) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на  $n$ -мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при  $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$  рассматриваемая система описывает геодезический поток на  $n$ -мерной сфере. В случае (41) если  $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$ , то система описывает движение  $(n + 1)$ -мерного твердого тела в силовом поле  $F(\alpha)$  под действием следящей силы [11]. В частности, если  $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\delta(\alpha) = \sin \alpha$ , то система описывает также обобщенный  $(n + 1)$ -мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2].

Если функция  $\delta(\alpha)$  не периодическая, то рассматриваемая диссипативная система является системой, обладающей переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). Тем не менее и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также представляет собой новый *нетривиальный* случай интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 1 // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. **134**. 6–128.
2. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 2 // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. **135**. 3–93.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Докл. РАН. 2017. **475**, № 5. 519–523.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Докл. РАН. 2017. **477**, № 2. 168–172.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Докл. РАН. 2018. **479**, № 3. 270–276.
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. 1984. **219**, № 2. 228–237.
8. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
10. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. **53**, вып. 3. 209–210.
11. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. матем. 2015. **20**, вып. 4. 3–231.

Поступила в редакцию  
24.04.2018

УДК 511

## ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ СМЕСЬЮ ГАЗОВ И ВОДЫ С ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЕМ

**Д. И. Романова<sup>1</sup>, В. Р. Душин<sup>2</sup>, В. Ф. Никитин<sup>3</sup>**

В статье приводятся результаты численного моделирования термогазового вытеснения нефти из пористого коллектора. Вытеснение производится посредством нагретой смеси газа и воды. Закачиваемый газ — двухкомпонентный, состоит из азота и кислорода. В процессе реакции выделяются тепло, углекислый газ и водяной пар. В результате тепловыделения вязкость нефти снижается и процесс вытеснения ускоряется.

*Ключевые слова:* термогазовый метод, вытеснение нефти, пористая среда, трехфазный поток.

The paper presents the results of numerical modeling of thermogas displacement of oil from a porous reservoir. In this method, displacement is performed by means of a heated mixture

<sup>1</sup> *Романова Дарья Игоревна* — асп. каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: romanovadi@gmail.com.

<sup>2</sup> *Душин Владислав Роальдович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vladdush@rambler.ru.

<sup>3</sup> *Никитин Валерий Федорович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vfnikster@gmail.com.

*Romanova Daria Igorevna* — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

*Dushin Vladislav Roaldovich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.

*Nikitin Valeriy Fedorovich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.

of gas and water. The injected gas is a two-component gas consisting of nitrogen and oxygen. During the reaction, heat, carbon dioxide and water vapor are released. As a result of heat release, the viscosity of oil decreases and the displacement process accelerates.

*Key words:* thermogas method, oil displacement, porous medium, three-phase flow.

**1. Введение.** Метод термогазового вытеснения нефти [1], рассмотренный в настоящей работе, используется для повышения нефтеотдачи пласта. Он заключается в том, что в нагнетательную скважину подается нагретая смесь воды и газа. Газ — это смесь азота и кислорода, в частности воздух. Нагретый кислород вступает в реакцию с углеводородом, в результате чего происходит его окисление с выделением тепла, образуются углекислый газ и водяной пар. Температура флюида повышается, а вязкость падает, тем самым ускоряется процесс вытеснения нефти из пласта.

Для описания процесса вытеснения используется трехфазная модель флюида в пористой среде. Три фазы — вода, нефть и газ — не смешиваются, имеют единую температуру и различное давление; разность давлений фаз характеризуется капиллярными давлениями. Среда, внутри которой залегает нефть, пористая с пористостью  $\phi = 0.2$ . Движение флюида в такой среде называется фильтрационным и описывается уравнениями Дарси. Скелет имеет отличную от флюида температуру, и тем самым модель пористой среды является двухтемпературной.

**2. Математическая модель.** Процесс вытеснения нефти из пласта описывается законами сохранения массы, количества движения и энергии. После необходимых преобразований из вышеперечисленных общих законов получается система из десяти уравнений: семь уравнений баланса массы (для трех фаз и четырех компонентов газовой фазы), уравнение для давления, уравнение для температуры потока и уравнение для температуры скелета. Выпишем их в соответствующем порядке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g s_g \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{w}_g) &= \dot{m}_g, & \frac{\partial Y_{O_2} \rho_g s_g \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (Y_{O_2} \rho_g \mathbf{w}_g) &= \dot{m}_{O_2}, \\ \frac{\partial \rho_w s_w \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{w}_w) &= \dot{m}_w, & \frac{\partial Y_{CO_2} \rho_g s_g \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (Y_{CO_2} \rho_g \mathbf{w}_g) &= \dot{m}_{CO_2}, \\ \frac{\partial \rho_o s_o \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{w}_o) &= \dot{m}_o, & \frac{\partial Y_{H_2O(g)} \rho_g s_g \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (Y_{H_2O(g)} \rho_g \mathbf{w}_g) &= \dot{m}_{H_2O(g)}, \\ & & \sum_{i=w,o,g} \phi s_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \sum_{i=w,o,g} \rho_i \frac{k k_{ri}}{\mu_i} \nabla p_i \right) &= 0, \\ & & \frac{\partial \phi \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{w} H &= -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q_r + Q_s, \\ & & \frac{\partial (1 - \phi) \rho_s E_s}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_s - Q_s. \end{aligned}$$

Здесь  $s_i$  — объемная доля каждой из фаз в потоке;  $\mathbf{w}_i$  — средняя скорость фильтрации фазы, индекс  $i$  показывает фазу:  $w$  — жидкая водная фаза (water),  $o$  — углеводородная фаза или нефтяная (oil),  $g$  — газообразная фаза (gas). Так как газовая фаза состоит из нескольких компонентов, концентрация которых важна для расчета параметров задачи, вводятся массовые доли компонентов газовой смеси  $Y_j$ ,  $j = N_2, O_2, CO_2, H_2O(g)$ . Далее  $\dot{m}_k$  — скорость притока массы в соответствующую фазу или компонент;  $\rho_k$  — плотность;  $k$  — проницаемость;  $k_{ri}$  — относительная проницаемость фазы;  $\rho_i$  — фазовое давление;  $\mu_i$  — вязкость;  $E$  — тепловая энергия флюида;  $E_s$  — тепловая энергия скелета;  $H$  — энтальпия;  $\mathbf{q}$  — приток тепла к флюиду;  $\mathbf{q}_s$  — приток тепла к скелету;  $Q_r$  — поток тепла, полученный за счет химической реакции;  $Q_s$  — теплообмен между скелетом и флюидом.

В данных уравнениях использовались следующие обозначения:

$\rho_i = \rho_i(\rho, T)$  — плотности фаз, линейно зависящие от общей функции давления и обратно пропорциональные температуре:

$$\begin{aligned} \rho_w &= \frac{\rho_{0H_2O} + a_{0H_2O}^{-2} (p - p_0)}{1 + \beta_w (T - T_0)}, & \rho_o &= \frac{\rho_{0C_nH_m} + a_{0C_nH_m}^{-2} (\rho - \rho_0)}{1 + \beta_o (T - T_0)}, \\ p_g &= \frac{\rho}{RT} \left( \frac{Y_{N_2}}{W_{N_2}} + \frac{Y_{O_2}}{W_{O_2}} + \frac{Y_{CO_2}}{W_{CO_2}} + \frac{Y_{H_2O(g)}}{W_{H_2O}} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 998 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{\text{C}_8\text{H}_{18}} = 850 \text{ кг/м}^3$  (с учетом формулы углеводорода  $\text{C}_8\text{H}_{18}$ ) — плотности при опорных условиях;

$a_{\text{H}_2\text{O}} = 1400 \text{ м/с}$ ,  $a_{\text{C}_8\text{H}_{18}} = 1300 \text{ м/с}$  — скорости звука;

$p_0 = 10^6 \text{ Па}$  — давление при опорных условиях;

$T_0 = 400 \text{ К}$  — температура при опорных условиях;

$\beta_w = 0.0011 \text{ 1/К}$ ,  $\beta_o = 0.0008701 \text{ 1/К}$  — коэффициенты объемного расширения за счет тепла;

$R = 8.314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$  — универсальная газовая постоянная;

$W_{\text{N}_2} = 0.02801 \text{ кг/моль}$ ,  $W_{\text{O}_2} = 0.032 \text{ кг/моль}$ ,  $W_{\text{CO}_2} = 0.04401 \text{ кг/моль}$ ,  $W_{\text{H}_2\text{O}} = 0.01802 \text{ кг/моль}$  — молярные массы соответствующих веществ.

Вязкость фазы воды  $\mu_w$  вычисляется по формуле [2, с. 36, формула 1.53]

$$\frac{0.001}{\mu_w} = 9 \cdot 10^{-6} T^2 - 0.03 T - 8.3,$$

которая позволяет с высокой точностью определить динамическую вязкость воды в  $\text{Па} \cdot \text{с}$  при изменении температуры от 300 до 900 К.

Для вычисления вязкости углеводородной фазы  $\mu_o$  используем соотношение [2, с. 34, формула 1.50]

$$\mu_o = \rho_o(T, p) \cdot 10^{-6} ((\nu^0 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^{-7}) \left( \frac{T^0 - 273.15}{T - 273.15} \right)^4 - 6 \cdot 10^{-7}),$$

кинематическая вязкость нефти ( $\text{C}_8\text{H}_{18}$ )  $\nu^0$  при температуре  $T^0 = 243.15 \text{ К}$  составляет  $0.001 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Вязкость газовой фазы  $\mu_g$  находится из соотношения Аррениуса [3]:

$$\mu_g = (\mu_{\text{N}_2})^{x_{\text{N}_2}} \cdot (\mu_{\text{O}_2})^{x_{\text{O}_2}} \cdot (\mu_{\text{CO}_2})^{x_{\text{CO}_2}} \cdot (\mu_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})})^{x_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})}},$$

где  $x_i = \frac{Y_i/W_i}{\sum_i Y_i/W_i}$  — мольная доля соответствующего вещества.

Вязкости компонентов газовой фазы вычислялись по формуле Сазерленда [3]:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{N}_2} &= \mu_{0\text{N}_2} \frac{T_{0\text{N}_2} + C_{\text{N}_2}}{T + C_{\text{N}_2}} \left( \frac{T}{T_{0\text{N}_2}} \right)^{3/2}, & \mu_{\text{O}_2} &= \mu_{0\text{O}_2} \frac{T_{0\text{O}_2} + C_{\text{O}_2}}{T + C_{\text{O}_2}} \left( \frac{T}{T_{0\text{O}_2}} \right)^{3/2}, \\ \mu_{\text{CO}_2} &= \mu_{0\text{CO}_2} \frac{T_{0\text{CO}_2} + C_{\text{CO}_2}}{T + C_{\text{CO}_2}} \left( \frac{T}{T_{0\text{CO}_2}} \right)^{3/2}, & \mu_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})} &= \mu_{0\text{H}_2\text{O}(\text{g})} \frac{T_{0\text{H}_2\text{O}(\text{g})} + C_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})}}{T + C_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})}} \left( \frac{T}{T_{0\text{H}_2\text{O}(\text{g})}} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Для расчета были использованы следующие коэффициенты:

$\mu_{0\text{N}_2} = 17.81 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $C_{\text{N}_2} = 111 \text{ К}$ ,  $T_{0\text{N}_2} = 300.55 \text{ К}$ ,

$\mu_{0\text{O}_2} = 20.18 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $C_{\text{O}_2} = 127 \text{ К}$ ,  $T_{0\text{O}_2} = 292.25 \text{ К}$ ,

$\mu_{0\text{CO}_2} = 14.8 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $C_{\text{CO}_2} = 240 \text{ К}$ ,  $T_{0\text{CO}_2} = 293.15 \text{ К}$ ,

$\mu_{0\text{H}_2\text{O}(\text{g})} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $C_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})} = 0 \text{ К}$ ,  $T_{0\text{H}_2\text{O}} = 330 \text{ К}$ .

Для относительных проницаемостей, характеризующих способность одной фазы протекать через другую, рассмотрена модель Бэкера [4]:

$$k_{rw} = \frac{(s_o - s_{or})k_{rwo} + (s_g - s_{gr})k_{rwg}}{(s_o - s_{or}) + (s_g - s_{gr})}, \quad k_{ro} = \frac{(s_w - s_{wr})k_{row} + (s_g - s_{gr})k_{rog}}{(s_w - s_{wr}) + (s_g - s_{gr})}, \quad k_{rg} = \frac{(s_w - s_{wr})k_{rgw} + (s_o - s_{or})k_{rgo}}{(s_w - s_{wr}) + (s_o - s_{or})}.$$

Здесь  $s_{wr} = 0.15$ ,  $s_{gr} = 0$ ,  $s_{or} = 0.2$  — остаточные насыщенности фаз;  $k_{rij}$  — относительные проницаемости в соответствующих двухфазных потоках, рассчитываемые по модели Брукса-Кори [5, 6]:

$$k_{rog}(s_o) = (S_o^*)^4, \quad k_{rgo}(s_o) = (1 - S_o^*)^2(1 - (S_o^*)^2), \quad S_o^* = \frac{s_o - s_{or}}{1 - s_{or} - s_{wr}};$$

$$k_{rwo}(s_w) = (S_w^*)^4, \quad k_{row}(s_w) = (1 - S_w^*)^2(1 - (S_w^*)^2), \quad S_w^* = \frac{s_w - s_{wr}}{1 - s_{wr} - s_{gr}};$$

$$k_{rwg}(s_w) = (S_w^*)^4, \quad k_{rgw}(s_w) = (1 - S_w^*)^2(1 - (S_w^*)^2), \quad S_w^* = \frac{s_w - s_{wr}}{1 - s_{wr} - s_{or}}.$$

Капиллярное давление аппроксимируется моделью Кори:

$$P_{cow} = c_w S_w^{-a}, \quad P_{cog} = c_g S_g^{-a},$$

где  $S_i$  — нормированные насыщенности, определяемые соотношениями

$$S_w = \frac{s_w}{1 - s_{orw}}, \quad S_g = \frac{s_g}{1 - s_{org}}.$$

Здесь  $c_w = 5.5 \cdot 10^4$  Па,  $c_g = 1$  Па — капиллярное давление при максимальной насыщенности ( $s_i = 1$ );  $a = 0.5$  — коэффициент капиллярного давления, зависящий от размера пор;  $s_{orw} = 0.3$ ,  $s_{org} = 0.3$  — остаточные насыщенности в системах “нефть–вода” и “нефть–газ”.

Выражения для вычисления скоростей фильтрации фаз запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_w &= -\frac{kk_{rw}}{\mu_w} \left\{ \nabla p + \left( \frac{M_w}{M} - 1 \right) \frac{dP_{cow}}{ds_w} \nabla s_w + \left( \frac{M_g}{M} \right) \frac{dP_{cog}}{ds_g} \nabla s_g \right\}, \\ \mathbf{w}_o &= -\frac{kk_{rw}}{\mu_o} \left\{ \nabla p + \left( \frac{M_w}{M} \right) \frac{dP_{cow}}{ds_w} \nabla s_w + \left( \frac{M_g}{M} \right) \frac{dP_{cog}}{ds_g} \nabla s_g \right\}, \\ \mathbf{w}_g &= -\frac{kk_{rg}}{\mu_g} \left\{ \nabla p + \left( \frac{M_w}{M} \right) \frac{dP_{cow}}{ds_w} \nabla s_w + \left( \frac{M_g}{M} - 1 \right) \frac{dP_{cog}}{ds_g} \nabla s_g \right\}, \\ M_i &= \rho_i \frac{kk_{ri}}{\mu_i}, \quad M = \sum_{i=w,o,g} M_i. \end{aligned}$$

Здесь  $k = 10^{-14} \text{ м}^2$  — проницаемость, характеризующая способность пористого скелета пропускать через себя жидкость; в фигурных скобках указан градиент фазового давления, который разложен на слагаемые таким образом, чтобы в результирующем уравнении для давления при введении среднего давления  $\rho$  градиенты насыщенностей сократились.

Тепловая энергия флюида

$$\phi \rho E = \phi \rho_w s_w c_w T + \phi \rho_o s_o c_o T + \phi \rho_g s_g \sum_{j=N_2, O_2, CO_2, H_2O(g)} (c_{Vj} Y_j) T.$$

Здесь  $c_w = 4180.6$  Дж/(кг·К);  $c_o = 1800$  Дж/(кг·К);  $c_{VN_2} = 1040$  Дж/(кг·К);  $c_{VO_2} = 918$  Дж/(кг·К);  $c_{VCO_2} = 820$  Дж/(кг·К);  $c_{VH_2O(g)} = 2078.4$  Дж/(кг·К) — удельные теплоемкости, в случае газов — при постоянном объеме;  $T$  — температура флюида, единая для всех фаз.

Тепловая энергия скелета

$$\rho_s E_s = \rho_s c_s T_s, \quad c_s = 1000 \text{ Дж/(кг·К)}, \quad \rho_s = 2000 \text{ кг/м}^3.$$

Энтальпия флюида (сумма тепловой энергии и работы сил давления)

$$\rho \mathbf{w} H = \rho_w \mathbf{w}_w c_w T + \rho_o \mathbf{w}_o c_o T + \rho_g \mathbf{w}_g \sum_{j=N_2, O_2, CO_2, H_2O(g)} (c_{pj} Y_j) T.$$

Теплоемкости газов при постоянном давлении вычисляются по формуле

$$c_{pj} = c_{Vj} \cdot \gamma_j, \quad j = N_2, O_2, CO_2, H_2O(g),$$

где  $\gamma_{N_2} = 1.4$ ;  $\gamma_{O_2} = 1.4$ ;  $\gamma_{CO_2} = 1.35$ ;  $\gamma_{H_2O(g)} = 1.3$  — показатели адиабаты.

Химическая энергия

$$Q_r = -\dot{m}_w h_w^0 - \dot{m}_o h_o^0 - \sum_{j=N_2, O_2, CO_2, H_2O(g)} \dot{m}_j h_j^0,$$

где  $h_w^0 = -285.8 \cdot 10^3$  Дж/кг;  $h_o^0 = -249.95 \cdot 10^3$  Дж/кг;  $h_{N_2}^0 = 0$  Дж/кг;  $h_{O_2}^0 = 0$  Дж/кг;  $h_{CO_2}^0 = -393.5 \cdot 10^3$  Дж/кг;  $h_{H_2O(g)}^0 = -241.8 \cdot 10^3$  Дж/кг — удельные энтальпии образования.

Потоки энергии, полученные за счет теплопроводности во флюиде и скелете, соответственно имеют вид

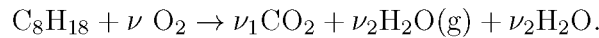
$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (-\phi \kappa_f \nabla T) = \nabla \cdot \left( -\phi \sum_{i=w,o,g} s_i \kappa_i \nabla T \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{q}_s = \nabla \cdot (-(1-\phi) \kappa_s \nabla T),$$

где  $\kappa_w = 0.55$  Вт/(К·м);  $\kappa_o = 0.128$  Вт/(К·м);  $\kappa_g = 0.05$  Вт/(К·м);  $\kappa_s = 2$  Вт/(К·м) — коэффициенты теплопроводности.

Приток тепла от скелета

$$Q_s = C(T_s - T), \quad C = 1100 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}).$$

В скважину закачивается смесь азота и кислорода. Предполагается следующая реакция:



Баланс устанавливается при следующих стехиометрических коэффициентах:

$$\nu = 12.5; \quad \nu_1 = 8; \quad \nu_2 = 4.5.$$

Скорость реакции

$$\dot{\omega} = \kappa(T)(s_o - s_{or})(s_g - s_{gr})Y_{\text{O}_2} \left( \frac{p}{p_*} \right)^{\nu_*},$$

где  $p_* = 2 \cdot 10^7$  Па;  $\nu_* = 1$ ;  $\kappa(T)$  — коэффициент скорости реакции, определяемый по закону Аррениуса [7]:

$$\kappa(T) = \begin{cases} 0, & T < T_r; \\ \Lambda e^{-\frac{T_a}{T}}, & T \geq T_r. \end{cases}$$

Здесь  $\Lambda = 50000$  моль/(м<sup>3</sup>·с) — частотный фактор;  $T_a = 402$ К — температура активации;  $T_r = 408$ К — пороговая температура.

Получаем следующие выражения для скорости зарождения массы фаз и компонентов:

$$\begin{aligned} \dot{m}_w &= \phi \dot{\omega} \nu_2 W_{\text{H}_2\text{O}}, & \dot{m}_{\text{N}_2} &= 0, \\ \dot{m}_o &= -\phi \dot{\omega} W_{\text{C}_8\text{H}_{18}}, & \dot{m}_{\text{O}_2} &= -\phi \dot{\omega} \nu W_{\text{O}_2}, \\ \dot{m}_g &= \dot{m}_{\text{N}_2} + \dot{m}_{\text{O}_2} + \dot{m}_{\text{CO}_2} + \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})}, & \dot{m}_{\text{CO}_2} &= \phi \dot{\omega} \nu_1 W_{\text{CO}_2}, \\ \sum_{i=o,w,g} \dot{m}_i &= 0, & \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})} &= \phi \dot{\omega} \nu_2 W_{\text{H}_2\text{O}}. \end{aligned}$$

Здесь  $W_i$  — соответствующие молярные массы:  $W_{\text{H}_2\text{O}} = 0.01802$  кг/моль;  $W_{\text{CO}_2} = 0.04401$  кг/моль;  $W_{\text{O}_2} = 0.032$  кг/моль;  $W_{\text{N}_2} = 0.02801$  кг/моль;  $W_{\text{C}_8\text{H}_{18}} = 0.11423$  кг/моль.

**3. Начальные и граничные условия.** Решается плоская задача, область квадратная  $500 \times 500$  м<sup>2</sup>. По углам области расположены добывающие скважины, в центре — нагнетательная.

Во всех ячейках расчетной области в начальный момент времени выставляются следующие начальные значения параметров:

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot 10^7 \text{ Па}; \\ s_w &= 0.3, \quad s_o = 0.7, \quad s_g = 0; \\ Y_{\text{N}_2} &= 0, \quad Y_{\text{O}_2} = 0, \quad Y_{\text{CO}_2} = 0, \quad Y_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})} = 1; \\ T &= 400^\circ\text{К}, \quad T_s = 400^\circ\text{К}. \end{aligned}$$

Граничные условия:

границы области — твердые стенки;

в центре — нагнетательная скважина:  $p = 3 \cdot 10^7$  Па;  $T = 800^\circ\text{К}$ ;  $s_w = 0.4$ ;  $s_o = 0.2$ ;  $s_g = 0.4$ ;  $Y_{\text{N}_2} = 0.78$ ;  $Y_{\text{O}_2} = 0.22$ ;  $Y_{\text{CO}_2} = 0$ ,  $Y_{\text{H}_2\text{O}(\text{g})} = 0$ ;

по углам расставлены 4 добывающие скважины:  $p = 10^7$  Па.

**4. Результаты.** Проведено численное моделирование термогазового воздействия на нефтяной пласт при вытеснении из него нефти. Рассчитаны следующие процессы: межфазный переход массы

за счет химической реакции, выделение энергии в процессе химической реакции, теплопроводность, теплообмен между скелетом и флюидом, конвективный приток тепла, динамика вытеснения фаз. Получены поля распределенных параметров (насыщенности флюида фазами, концентрации компонентов газовой фазы, давление, температура флюида, температура скелета) во все моменты времени. По ним построены график дебита нефти добывающей скважины (рис. 1), график суммарного объема вытесненной нефти (рис. 2), график насыщенности флюида фазами вдоль отрезка от нагнетательной скважины до добывающей (рис. 3). В силу симметрии задачи графики построены для одной из четырех добывающих скважин.

Из рис. 1 и 2 видно, что при использовании термогазового метода с исследованными параметрами объем вытесненной нефти спустя год работы скважины увеличивается на 10.6%. Дебит нефти добывающей скважины на 365-й день превышает на 19% аналогичное значение для простого вытеснения. Также расчеты показывают, что объем вытесненного флюида (нефти, воды и газа в сумме) увеличивается на 13%. Дальнейшее повышение нефтеотдачи пласта в данной постановке невозможно, так как количество прореагировавших углеводородов становится слишком большим и дает отрицательный прирост дебита нефти относительно простого вытеснения даже на ранних этапах добычи. Повышение интенсивности вытеснения зависит от характера протекающих химических реакций и состава закачиваемой смеси.

Из рис. 3 видно, что при вытеснении жидких углеводородов с применением термогазового метода можно выделить два фронта вытеснения. Первый, наиболее быстро перемещающийся фронт возникает под действием просачивающегося газа. При этом вытесняется около 5% углеводородов. Вторым, медленным фронтом вытеснения углеводородов смесью нагретых воды и газа приводит к вытеснению 60–65% углеводородов из пласта.

**5. Выводы.** При использовании термогазового метода объем вытесненной нефти за единицу времени увеличивается, что обусловлено характером и скоростью протекающих реакций и составом закачиваемой смеси. При вытеснении жидких углеводородов с помощью термогазового метода выделяются два фронта вытеснения — быстрый и медленный. Быстрый фронт характеризуется малым процентом вытеснения, большая часть флюида вытесняется в режиме медленного фронта.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-08-01032).

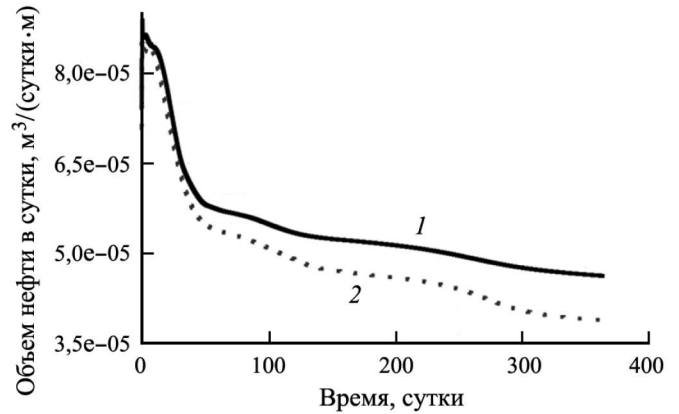


Рис. 1. Дебит нефти добывающей скважины в кубометрах в сутки на метр мощности пласта: 1 — термогазовое вытеснение; 2 — простое вытеснение

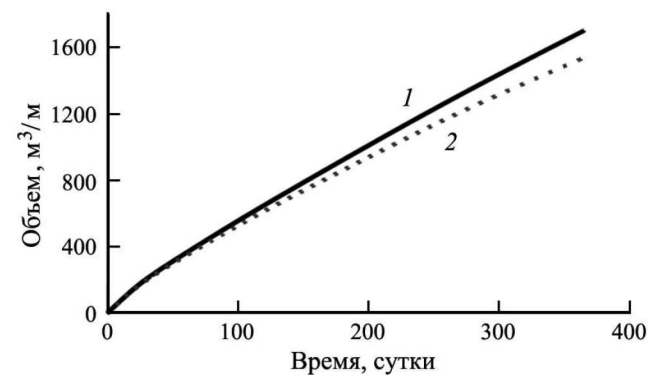


Рис. 2. Суммарный объем вытесненной нефти в кубометрах на метр мощности пласта: 1 — термогазовое вытеснение; 2 — простое вытеснение

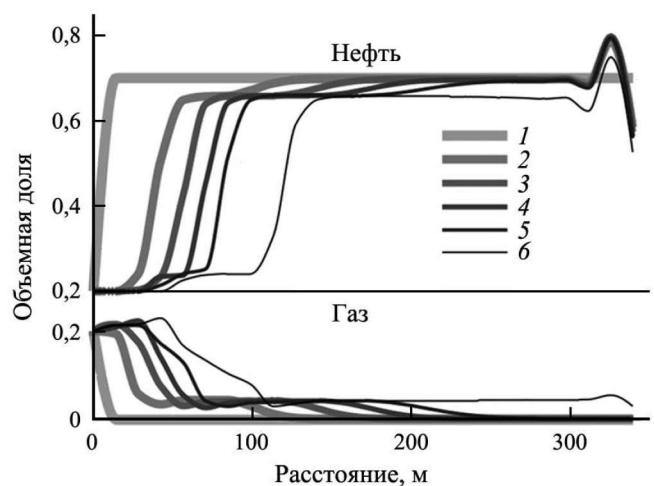


Рис. 3. Насыщенность потока фазами нефти и газа вдоль отрезка от нагнетающей скважины до добывающей: 1 — 0-й день; 2 — 73-й; 3 — 146-й; 4 — 219-й; 5 — 292-й; 6 — 365-й день

Быстрый фронт характеризуется малым процентом вытеснения, большая часть флюида вытесняется в режиме медленного фронта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольпин С.Г., Саитгареев А.Р., Смирнов Н.Н., Кравченко М.Н., Корнаева Д.А., Диева Н.Н.* Перспективы применения волновой технологии термогазохимического воздействия для повышения нефтеотдачи пластов // Нефтяное хозяйство. 2014. № 1. 62–66.
2. *Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М.* Термические методы повышения нефтеотдачи пластов / Пер. с франц. М.: Недра, 1989.
3. *Бретинайдер С.* Свойства газов и жидкостей: Инженерные методы расчета / Пер. с польск. М.; Ташкент: Химия, 1966.
4. *Li K., Horne R.N.* Comparison of methods to calculate relative permeability from capillary pressure in consolidated water-wet porous media // Water Resources Res. 2006. N 42.
5. *Corey A.T.* The interrelation between gas and oil relative permeabilities // Prod. Mon. 1954. 38–41.
6. *Brooks R.H., Corey A.T.* Hydraulic properties of porous media // Hydrology Papers. 1964. N 3.
7. *Smirnov N.N., Nikitin V.F.* Modeling and simulation of hydrogen combustion in engines // Int. J. Hydrogen Energy. 2014. **39**, N 2. 1122–1136.

Поступила в редакцию  
16.05.2018

УДК 514.86 : [531.1/3 : 539.3]

## ОБ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА ДЛЯ ПОДСИСТЕМ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Г. Л. Бровко<sup>1</sup>

В рамках классической механики сплошной среды в предположении, что некоторая система отсчета является инерциальной для некоторой совокупности движущихся и взаимодействующих тел (большой системы), получены необходимые и достаточные условия существования инерциальной системы отсчета для подсистемы этих тел, рассматриваемой как самостоятельная большая система. Указано движение такой системы отсчета (с точностью до галилеевых преобразований) относительно старой системы отсчета.

*Ключевые слова:* классическая механика сплошной среды, большая система тел, подсистема, инерциальная система отсчета.

In the framework of classical continuum mechanics, for the frame of reference being inertial for a certain system of moving and interacting bodies (a large system) the necessary and sufficient conditions are formulated for the existence of an inertial frame of reference for the subsystem of the bodies considered as an independent large system. The motion of such a reference frame relative to the old reference frame (with the accuracy up to the Galilean transformations) is specified.

*Key words:* classical continuum mechanics, large system of bodies, subsystem, inertial frame of reference.

**Введение.** В классической механике сплошной среды в качестве основных законов наряду с законом сохранения массы принимаются законы движения Коши–Эйлера, выражающие баланс количества и момента количества движения в инерциальной системе отсчета [1, 2]. В соответствии с первым законом Ньютона существование инерциальной системы отсчета постулируется [3], однако вопрос о том, какие системы отсчета, в каких пределах и с какой точностью можно рассматривать как инерциальные, подробно не рассматривается. Между тем практически важно уметь оценить, является ли та или иная система отсчета инерциальной по отношению к выделенной системе тел (их движениям и взаимодействиям).

<sup>1</sup> *Бровко Георгий Леонидович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: glb@mech.math.msu.su.

*Brovko Georgii Leonidovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.

В настоящей работе в рамках классической механики сплошной среды в предположении, что некоторая система отсчета является инерциальной для некоторой совокупности движущихся и взаимодействующих тел (большой системы), получены необходимые и достаточные условия существования инерциальной системы отсчета для подсистемы этих тел, рассматриваемой как самостоятельная большая система. Указано движение такой системы отсчета (с точностью до галилеевых преобразований) относительно старой системы отсчета.

При этом под инерциальной системой отсчета для некоторой совокупности тел (называемой большой системой) понимается такая система отсчета, в которой движения тел большой системы и их взаимодействия между собой (называемые здесь активными силами) регулируются классическими ньютоновыми законами баланса количества движения и момента количества движения, выражаемыми для рассматриваемых здесь деформируемых тел известными интегральными законами движения Коши–Эйлера или эквивалентными им уравнениями движения Коши для сплошной среды [1–3].

**1. Уравнения движения тел большой системы в инерциальной системе отсчета.** Пусть для некоторой совокупности  $\mathcal{U}$  движущихся и взаимодействующих тел на некотором временном промежутке существует инерциальная система отсчета  $\phi$ . Назовем  $\mathcal{U}$  большой системой, а силы взаимодействия ее тел (подтел) друг с другом — *активными*. Тогда в этой системе отсчета в произвольный момент времени (из указанного промежутка) для любого тела  $\mathcal{B}$  из  $\mathcal{U}$  уравнения движения Коши–Эйлера имеют вид [1–3]

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}}^e, \quad \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{B}x_0} = \mathbf{m}_{\mathcal{B}x_0}^e, \tag{1}$$

где  $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$  — количество движения тела  $\mathcal{B}$ ;  $\mathbf{q}_{\mathcal{B}x_0}$  — момент количества движения относительно точки  $\mathbf{x}_0$  (неподвижной в системе отсчета  $\phi$ );  $\mathbf{g}_{\mathcal{B}}^e$  и  $\mathbf{m}_{\mathcal{B}x_0}^e$  — векторы активных сил и момента сил (относительно точки  $\mathbf{x}_0$ ), внешних по отношению к телу  $\mathcal{B}$ , т.е. воздействующих на тело  $\mathcal{B}$  со стороны всех остальных тел большой системы  $\mathcal{U}$  (со стороны дополнения  $\mathcal{B}^e$  тела  $\mathcal{B}$  до соединения  $\Sigma$  всех тел большой системы  $\mathcal{U}$ ). Эти величины выражаются через интегралы по области  $\Omega_{\mathcal{B}}$  актуальной конфигурации тела  $\mathcal{B}$  и по ее границе  $\Gamma_{\mathcal{B}} = \partial\Omega_{\mathcal{B}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} &\equiv \int_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho \mathbf{v} dV, & \mathbf{g}_{\mathcal{B}}^e &\equiv \int_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho \mathbf{b}_{\mathcal{B}}^e dV + \int_{\Gamma_{\mathcal{B}}} \mathbf{t}_{\mathcal{B}}^e dS, \\ \mathbf{q}_{\mathcal{B}x_0} &\equiv \int_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v} dV, & \mathbf{m}_{\mathcal{B}x_0}^e &\equiv \int_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}_{\mathcal{B}}^e dV + \int_{\Gamma_{\mathcal{B}}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{\mathcal{B}}^e dS, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\rho$  — плотность массы тела по отношению к объему  $V$  в актуальной конфигурации;  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{v}$  — положение и скорость точки тела;  $\mathbf{b}_{\mathcal{B}}^e$  — плотность активных внешних для тела  $\mathcal{B}$  массовых сил по отношению к массе;  $\mathbf{t}_{\mathcal{B}}^e$  — плотность активных внешних поверхностных (контактных) сил по отношению к площади  $S$  поверхности тела в актуальной конфигурации; символом  $\times$  обозначено векторное умножение.

Сделаем два важных обобщающих замечания.

**Замечание 1.** Обычно в классических построениях механики сплошной среды [1–3], в конкретных задачах поля внутренних массовых взаимодействий в теле считаются заданными, чаще всего нулевыми (тривиальными), что сводит рассмотрение лишь к внешним массовым силам. Мы здесь не будем прибегать к такому упрощению, допуская наличие в каждом теле  $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$  нетривиального поля плотностей  $\mathbf{b}_{\mathcal{B}}^e$  внутренних (для тела  $\mathcal{B}$ ) массовых сил.

Тогда, учитывая результирующие силы [3] и вспоминая, что в соответствии с третьим законом Ньютона о действии и противодействии результирующая сила аддитивна на отделенных телах и является собою векторную меру на подтелах любого тела  $\mathcal{B}$ , можно показать, что суммарные (интегральные) сила и момент, создаваемые в каждом теле полем  $\mathbf{b}_{\mathcal{B}}^e$  его внутренних массовых взаимодействий, равны нулю (т.е. сила и момент “самовоздействия” любого тела суть нулевые векторы):

$$\mathbf{g}_{\mathcal{B}}^i \equiv \int_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho \mathbf{b}_{\mathcal{B}}^i dV = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_{\mathcal{B}x_0}^i \equiv \int_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}_{\mathcal{B}}^i dV = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Это позволяет уравнения (1) для любого тела представить в суммарном виде:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}}, \quad \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{B}x_0} = \mathbf{m}_{\mathcal{B}x_0}, \tag{4}$$

где подразумеваются обозначения

$$\mathbf{g}_B \equiv \mathbf{g}_B^e + \mathbf{g}_B^i, \quad \mathbf{m}_{Bx_0} \equiv \mathbf{m}_{Bx_0}^e + \mathbf{m}_{Bx_0}^i, \quad \mathbf{b}_B \equiv \mathbf{b}_B^e + \mathbf{b}_B^i \quad (5)$$

для суммарных активных (внешних и внутренних) сил, моментов сил, а также для плотностей массовых сил соответственно.

Более того, равенства (4) справедливы, в частности, и для соединенного тела  $\Sigma$  большой системы  $\mathcal{U}$ , не испытывающего активных внешних воздействий:

$$\mathbf{g}_\Sigma \equiv \mathbf{g}_\Sigma^i, \quad \mathbf{m}_{\Sigma x_0} \equiv \mathbf{m}_{\Sigma x_0}^i, \quad \mathbf{b}_\Sigma \equiv \mathbf{b}_\Sigma^i \quad (\mathbf{g}_\Sigma^e \equiv 0, \quad \mathbf{m}_{\Sigma x_0}^e \equiv 0, \quad \mathbf{b}_\Sigma^e \equiv 0). \quad (6)$$

А поскольку для произвольного тела  $B$  на его подтелах плотности  $\mathbf{b}_B$  и  $\mathbf{b}_\Sigma$  определяют одну и ту же векторную меру — массовую силу воздействия на эти подтела со стороны их дополнений в рамках большой системы  $\mathcal{U}$ , а тем самым универсально на  $\Sigma$  [4, 5], то имеем

$$\mathbf{b}_B \equiv \mathbf{b}_\Sigma \quad \forall B \in \mathcal{U}, \quad (7)$$

т.е. суммарные поля активных внешних и внутренних массовых воздействий не зависят от выбора тела  $B$  в рамках большой системы  $\mathcal{U}$ , а определяются лишь этой системой (ее соединенным телом  $\Sigma$ ).

В свою очередь плотности активных внешних поверхностных воздействий  $\mathbf{t}_B^e$  на каждое тело  $B$  большой системы определяются полем тензора напряжений Коши  $\mathbf{S}$  в этом теле, а значит, и в соединенном теле  $\Sigma$  (поле  $\mathbf{S}$  в  $\Sigma$  не зависит от того, какое тело  $B$  мы рассматриваем) по известной формуле теории напряжений [1–5]:

$$\mathbf{t}_B^e = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная внешняя нормаль к поверхности  $\Gamma_B = \partial\Omega_B$  актуальной конфигурации тела.

Соотношения (7) с учетом (5), (6), а также (2), (3) позволяют переписать интегральные уравнения движения (4) для произвольного тела  $B$  из  $\mathcal{U}$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_B} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{\Omega_B} \rho \mathbf{b}_\Sigma dV + \int_{\Gamma_B} \mathbf{t}_B^e dS, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v} dV &= \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}_\Sigma dV + \int_{\Gamma_B} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_B^e dS, \end{aligned} \quad (9)$$

или с учетом тождеств (справедливых для любого постоянного  $\mathbf{x}_0$ )

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_B} \rho \mathbf{v} dV \equiv \int_{\Omega_B} \rho \mathbf{w} dV, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v} dV \equiv \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{w} dV$$

в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_B} \rho \mathbf{w} dV &= \int_{\Omega_B} \rho \mathbf{b}_\Sigma dV + \int_{\Gamma_B} \mathbf{t}_B^e dS, \\ \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{w} dV &= \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}_\Sigma dV + \int_{\Gamma_B} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_B^e dS, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{w}$  — ускорение точки тела.

На основании (7), (8) с использованием формулы Гаусса–Остроградского в силу произвольности тела  $B$  уравнения (9), (10) эквивалентно приводятся к известным локальным уравнениям движения Коши и граничному условию:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \mathbf{b}_\Sigma &= \rho \mathbf{w}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (\mathbf{x} \in \Omega_\Sigma), \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_B^e \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_B), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\operatorname{div}$  — оператор дивергенции по пространственной переменной  $\mathbf{x}$  актуальной конфигурации тела, верхний индекс  $(\cdot)^T$  означает транспонирование тензора.

Подчеркнем, что хотя соотношения (9)–(11) по виду совпадают с известными аналогичными соотношениями классических построений [1–3], здесь в качестве  $\mathbf{b}_\Sigma$  фигурирует не внешняя по отношению к какому-либо телу  $\mathcal{B}$ , а суммарная плотность внешних и внутренних активных массовых сил, не зависящая от выделения того или иного тела  $\mathcal{B}$ .

**Замечание 2.** Второе из интегральных уравнений движения — уравнение баланса момента количества движения — выполнено для любого переменного во времени центра приведения  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$ . Действительно, пользуясь для второго уравнения системы (10) формулами пересчета [3] момента количества движения и моментов сил относительно нового (переменного во времени) центра приведения и используя первую формулу (10), можно показать, что при любом переменном центре приведения  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t)$  второе уравнение (10) эквивалентно выражает условие баланса момента количества движения, установленное ранее для неподвижного  $\mathbf{x}_0$  в обеих формах вторых уравнений систем (9) и (10).

Напомним, что все формулы настоящего пункта получены и написаны для системы отсчета  $\phi$ , являющейся инерциальной для большой системы тел  $\mathcal{U}$ .

**2. Уравнения движения для тел подсистемы в произвольной системе отсчета.** Рассмотрим произвольную подсистему  $\mathcal{U}'$  тел большой системы  $\mathcal{U}$ . Соединенное тело подсистемы  $\mathcal{U}'$  обозначим через  $\Sigma'$  и активные (внешние, внутренние и суммарные) силы взаимодействия тел в рамках  $\mathcal{U}'$  будем помечать верхним штрихом, сохраняя в остальном смысл обозначений п. 1. Плотность массовых сил воздействия на тело  $\mathcal{B}'$  подсистемы  $\mathcal{U}'$  со стороны остальных тел большой системы  $\mathcal{U}$ , не входящих в  $\mathcal{U}'$ , обозначим через  $\mathbf{b}_{\Sigma'}''$ , а плотность таких же поверхностных сил — через  $\mathbf{t}_{\mathcal{B}'}''$ . Заметим, что  $\mathbf{t}_{\mathcal{B}'}''$  зависит как от выбора большой системы  $\mathcal{U}$  и подсистемы  $\mathcal{U}'$ , так и от выбора конкретного тела  $\mathcal{B}'$ ; в то же время для всех  $\mathcal{B}'$  из  $\mathcal{U}'$  выполнено  $\mathbf{b}_{\mathcal{B}'}'' \equiv \mathbf{b}_{\Sigma'}''$  и поле  $\mathbf{b}_{\Sigma'}''$  определяется лишь системой  $\mathcal{U}$  и подсистемой  $\mathcal{U}'$ .

Тогда в старой (инерциальной для  $\mathcal{U}$ ) системе отсчета  $\phi$  уравнения движения (10) для произвольного тела  $\mathcal{B}'$  примут вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho \mathbf{w} dV &= \int_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho (\mathbf{b}_{\Sigma'}' + \mathbf{b}_{\Sigma'}'') dV + \int_{\Gamma_{\mathcal{B}'}} (\mathbf{t}_{\mathcal{B}'}'' + \mathbf{t}_{\mathcal{B}'}'') dS, \\ \int_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{w} dV &= \int_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{b}_{\Sigma'}'' + \mathbf{b}_{\Sigma'}'') dV + \int_{\Gamma_{\mathcal{B}'}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{t}_{\mathcal{B}'}'' + \mathbf{t}_{\mathcal{B}'}'') dS, \end{aligned} \tag{12}$$

т.е. в локальной записи подобно (11) — вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho (\mathbf{b}_{\Sigma'}' + \mathbf{b}_{\Sigma'}'') &= \rho \mathbf{w}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (\mathbf{x} \in \Omega_{\Sigma'}), \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{t}_{\mathcal{B}'}^e + \mathbf{t}_{\mathcal{B}'}'') \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{\mathcal{B}'}), \end{aligned} \tag{13}$$

причем центр приведения  $\mathbf{x}_0$  в (12) — произвольная константа или функция времени.

Рассмотрим уравнения (12), (13) для подсистемы  $\mathcal{U}'$  в произвольной новой (не обязательно инерциальной) системе отсчета  $\phi_*$ . Переход от  $\phi$  к  $\phi_*$  характеризуется заменой [3] независимых эйлеровых переменных  $(\mathbf{x}, t)$  на  $(\mathbf{x}_*, t_*)$  по формулам

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_{0*} + \mathcal{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t_* = t + a, \tag{14}$$

где  $\mathbf{x}_{0*} \equiv \mathbf{x}_{0*}(t)$  — новый центр приведения;  $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}(t)$  — ортогональный оператор (тензор “поворота” старой системы отсчета относительно новой);  $\mathbf{x}_0$  — произвольное место в старой системе отсчета (выбранное, например, для простоты таким же, как в уравнениях (12)), без ущерба для общности формул (14)  $\mathbf{x}_0$  можно считать константой;  $a$  — произвольная константа размерности времени.

При этом преобразование скоростей и ускорений выражается известными [4–6] формулами сложения движений (Эйлера, Ривальса, Кориолиса):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_* &= \mathbf{v}_{*e} + \mathbf{v}_{*r}, \quad \mathbf{v}_{*e} = \dot{\mathbf{x}}_{0*} + \dot{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_{*r} = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}_{*e} &= \mathbf{v}_{*tr} + \mathbf{v}_{*rot}, \quad \mathbf{v}_{*tr} = \dot{\mathbf{x}}_{0*}, \quad \mathbf{v}_{*rot} = \dot{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{r} = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{r}_* \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_*, \\ \mathbf{w}_* &= \mathbf{w}_{*e} + \mathbf{w}_{*r} + \mathbf{w}_{*c}, \quad \mathbf{w}_{*e} = \ddot{\mathbf{x}}_{0*} + \dot{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{w}_{*r} = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}_{*e} &= 2\dot{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{v} = 2\mathcal{Q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{*r} \equiv 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{*r}, \quad \mathbf{w}_{*e} = \mathbf{w}_{*tr} + \mathbf{w}_{*rot} + \mathbf{w}_{*ax}, \\ \mathbf{w}_{*tr} &= \ddot{\mathbf{x}}_{0*}, \quad \mathbf{w}_{*rot} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}_* \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_*, \quad \mathbf{w}_{*ax} = \mathcal{Q}^2 \cdot \mathbf{r}_* \equiv \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_*). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{r}_* = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}$  ( $\mathbf{r}_* = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{r}$ ) — радиусы-векторы места  $\mathbf{x}$  и физически того же места  $\mathbf{x}_*$  точки тела в момент времени  $t$  и в физически тот же момент времени  $t_*$  относительно центров приведения  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_{0*}$  соответственно в старой и новой системах отсчета; кроме того, для указанного сложения движений через  $\mathbf{v}_{*e}$ ,  $\mathbf{v}_{*r}$  обозначены переносная и относительная скорости, через  $\mathbf{w}_{*e}$ ,  $\mathbf{w}_{*r}$ ,  $\mathbf{w}_{*c}$  — переносное, относительное и кориолисово ускорения. Для переносного движения старой системы отсчета относительно новой через  $\mathbf{v}_{*tr}$ ,  $\mathbf{v}_{*rot}$  обозначены поступательная и вращательная составляющие переносной скорости, через  $\mathbf{w}_{*tr}$ ,  $\mathbf{w}_{*rot}$ ,  $\mathbf{w}_{*ax}$  — поступательная, вращательная и осестремительная составляющие переносного ускорения. Наконец, через  $\mathcal{Q}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  обозначены антисимметричный ( $\mathcal{Q}^T = -\mathcal{Q}$ ) тензор и его коаксиальный вектор (характеризующие мгновенную скорость вращения старой системы отсчета относительно новой), определяемые равенствами

$$\mathcal{Q} = \dot{\mathcal{Q}} \cdot \mathcal{Q}^T, \quad \boldsymbol{\omega} = \text{soax } \mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathcal{Q},$$

где  $\boldsymbol{\epsilon}$  — тензор Леви-Чивиты.

При замене системы отсчета (14) область  $\Omega_{B'}$  актуальной конфигурации тела  $B'$  с границей  $\Gamma_{B'}$  переходит конгруэнтно в область  $\Omega_{B'_*}$  с границей  $\Gamma_{B'_*}$ , а другие величины преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \rho_* &= \rho, \quad \mathbf{b}_* = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{t}_* = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_* = \mathcal{Q} \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{S}_* &= \mathcal{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathcal{Q}^T, \quad \text{div}_* \mathbf{S}_* = \mathcal{Q} \cdot \text{div } \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (16)$$

где под  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{t}$  понимаются плотности любых указанных выше массовых и поверхностных сил, а  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $\Gamma_{B'}$ .

С учетом (14)–(16) и замечания 2 уравнения движения (12), (13) можно переписать в новой системе отсчета  $\phi_*$  в аналогичном виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{B'_*}} \rho \mathbf{w}_{*r} dV &= \int_{\Omega_{B'_*}} \rho (\mathbf{b}_{\Sigma'_*}'' + \mathbf{b}_{\Sigma'_*}''') dV + \int_{\Gamma_{B'_*}} (\mathbf{t}_{B'_*}^e + \mathbf{t}_{B'_*}^r) dS, \\ & \int_{\Omega_{B'_*}} \rho (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \times \mathbf{w}_{*r} dV = \\ &= \int_{\Omega_{B'_*}} \rho (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \times (\mathbf{b}_{\Sigma'_*}' + \mathbf{b}_{\Sigma'_*}''') dV + \int_{\Gamma_{B'_*}} (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \times (\mathbf{t}_{B'_*}^e + \mathbf{t}_{B'_*}^r) dS \end{aligned} \quad (17)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \text{div}_* \mathbf{S}_* + \rho (\mathbf{b}_{\Sigma'_*}'' + \mathbf{b}_{\Sigma'_*}''') &= \rho \mathbf{w}_{*r}, \quad \mathbf{S}_* = \mathbf{S}_*^T \quad (\mathbf{x}_* \in \Omega_{\Sigma'_*}), \\ \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{n}_* &= (\mathbf{t}_{B'_*}^e + \mathbf{t}_{B'_*}^r) \quad (\mathbf{x}_* \in \Gamma_{B'_*}). \end{aligned} \quad (18)$$

**3. Основная теорема.** Учитывая инерциальность системы отсчета  $\phi$  для большой системы тел  $\mathcal{U}$ , зададимся вопросом, в каком случае и какую из систем отсчета  $\phi_*$  можно считать инерциальной для подсистемы тел  $\mathcal{U}'$ , рассматриваемой как самостоятельная большая система.

Выражая  $\mathbf{w}_{*r}$  из (15), представим уравнения (17), (18) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{B'_*}} \rho \mathbf{w}_* dV &= \int_{\Omega_{B'_*}} \rho (\mathbf{b}_{\Sigma'_*}' + \mathbf{b}_{\Sigma'_*}'' + \mathbf{w}_{*e} + \mathbf{w}_{*c}) dV + \int_{\Gamma_{B'_*}} (\mathbf{t}_{B'_*}^e + \mathbf{t}_{B'_*}^r) dS, \\ & \int_{\Omega_{B'_*}} \rho (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \times \mathbf{w}_* dV = \\ &= \int_{\Omega_{B'_*}} \rho (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \times (\mathbf{b}_{\Sigma'_*}' + \mathbf{b}_{\Sigma'_*}'' + \mathbf{w}_{*e} + \mathbf{w}_{*c}) dV + \int_{\Gamma_{B'_*}} (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \times (\mathbf{t}_{B'_*}^e + \mathbf{t}_{B'_*}^r) dS \end{aligned} \quad (19)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \text{div}_* \mathbf{S}_* + \rho (\mathbf{b}_{\Sigma'_*}' + \mathbf{b}_{\Sigma'_*}'' + \mathbf{w}_{*e} + \mathbf{w}_{*c}) &= \rho \mathbf{w}_*, \quad \mathbf{S}_* = \mathbf{S}_*^T \quad (\mathbf{x}_* \in \Omega_{\Sigma'_*}), \\ \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{n}_* &= (\mathbf{t}_{B'_*}^e + \mathbf{t}_{B'_*}^r) \quad (\mathbf{x}_* \in \Gamma_{B'_*}). \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что новая система отсчета  $\phi_*$  является инерциальной для подсистемы движущихся и взаимодействующих тел  $\mathcal{U}'$  в том и только в том случае, когда уравнения (19), (20) для  $\mathcal{U}'$  имеют вид, вполне аналогичный уравнениям (10), (11) для  $\mathcal{U}$ , т.е. когда они содержат силовые поля лишь активных для подсистемы  $\mathcal{U}'$  взаимодействий. Это выполнено в точности тогда, когда подчеркнутые члены в уравнениях (19), (20) вносят нулевой вклад, т.е. когда для происходящих в подсистеме  $\mathcal{U}'$  движений выполнены условия

$$\mathbf{b}_{\Sigma' *}'' = -\mathbf{w}_{*e} - \mathbf{w}_{*c} \quad (\mathbf{x}_* \in \Omega_{\Sigma' *}), \quad \mathbf{t}_{B' *}'' = 0 \quad (\mathbf{x}_* \in \Gamma_{B' *}). \quad (21)$$

Второе из условий (21) в точности означает, что контактные воздействия на любые тела  $B'$  из  $\mathcal{U}'$  со стороны тел большой системы  $\mathcal{U}$ , не входящих в  $\mathcal{U}'$ , отсутствуют, иными словами, подсистема  $\mathcal{U}'$  не имеет силовых контактов с остальными телами большой системы  $\mathcal{U}$ .

Первое из условий (21) означает, что поле  $\mathbf{b}_{\Sigma' *}''$  массовых сил воздействия со стороны дополнения к  $\mathcal{U}'$  до  $\mathcal{U}$  на тела  $B'$  (на соединенное тело  $\Sigma'$ ) подсистемы  $\mathcal{U}'$  детально согласовано с данным движением тел подсистемы  $\mathcal{U}'$  (с движением ее соединенного тела  $\Sigma'$ ), а именно, как показывают формулы (15), выполнено равенство

$$\mathbf{b}_{\Sigma' *}'' = -\ddot{\mathbf{x}}_{0*} - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v}_* - \dot{\mathbf{x}}_{0*}) - (\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\Omega}^2) \cdot (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_{0*}) \quad (22)$$

для любой точки  $\mathbf{x}_*$  области  $\Omega_{\Sigma' *}$  актуальной конфигурации соединенного тела  $\Sigma'$  подсистемы  $\mathcal{U}'$  в системе отсчета  $\phi_*$ . Заметим, что первое и третье слагаемые в правой части (22) определяют некоторое линейное по  $\mathbf{x}_*$  поле, а второе слагаемое, линейное относительно поля скоростей  $\mathbf{v}_*$ , вообще говоря, нелинейно по  $\mathbf{x}_*$ .

Не задаваясь детальным выяснением условий выполнения равенства (22), потребуем его универсального выполнения для произвольных движений тел подсистемы  $\mathcal{U}'$ , т.е. для произвольных размещений  $\mathbf{x}_*$  точек тел и произвольного поля их скоростей  $\mathbf{v}_*$  в системе отсчета  $\phi_*$ . Как видно из (22), это имеет место в точности тогда, когда

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv 0, \quad \mathcal{Q} \equiv \text{const}, \quad (23)$$

т.е. в силу (14) тогда и только тогда, когда старая система отсчета  $\phi$  движется относительно новой системы отсчета  $\phi_*$  поступательно с ускорением  $\ddot{\mathbf{x}}_{0*}$ , а тем самым с точки зрения старой системы отсчета новая система отсчета движется относительно старой также поступательно с ускорением  $-\mathcal{Q}^T \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{0*}$ . При этом с необходимостью из (22) имеем

$$\mathbf{b}_{\Sigma' *}'' = -\ddot{\mathbf{x}}_{0*}, \quad (24)$$

т.е.  $\mathbf{b}_{\Sigma' *}''$  — однородное (возможно, зависящее от времени) поле массовых сил в  $\Omega_{\Sigma' *}$ , а между тем и в старой системе отсчета  $\phi$  это поле, принимающее значения  $\mathbf{b}_{\Sigma'}'' = \mathcal{Q}^T \cdot \mathbf{b}_{\Sigma' *}'' = -\mathcal{Q}^T \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{0*}$  (причем  $\mathcal{Q} \equiv \text{const}$ ), также однородно в  $\Omega_{\Sigma'}$  и притом совпадает с ускорением новой системы отсчета относительно старой (с точки зрения старой).

Применяя первое уравнение (1) с учетом (2) к соединенному телу  $\Sigma'$  подсистемы  $\mathcal{U}'$ , т.е. полагая  $B = \Sigma'$ , и замечая, что в этом случае  $\mathbf{b}_B^e \equiv \mathbf{b}_{\Sigma'}^e \equiv \mathbf{b}_{\Sigma'}''$ ,  $\mathbf{t}_B^e \equiv \mathbf{t}_{\Sigma'}^e \equiv \mathbf{t}_{\Sigma'}''$ , на основании (21)–(24) с использованием теоремы о движении центра масс [1–6] получаем, что функция времени  $\mathbf{b}_{\Sigma'}''$  и есть ускорение центра масс соединенного тела  $\Sigma'$  подсистемы  $\mathcal{U}'$  в старой системе отсчета  $\phi$ .

Таким образом, в рассматриваемом здесь случае с необходимостью получаем, что с точки зрения старой системы отсчета  $\phi$  (инерциальной для всей большой системы тел  $\mathcal{U}$ ) новая система отсчета  $\phi_*$  (инерциальная для подсистемы тел  $\mathcal{U}'$ ) движется относительно старой поступательно с ускорением центра масс соединенного тела  $\Sigma'$  подсистемы  $\mathcal{U}'$ , равным  $\mathbf{b}_{\Sigma'}''$  и порождаемым таким же (однородным) полем массовых сил действия остальной части большой системы  $\mathcal{U}$  на тела подсистемы  $\mathcal{U}'$  (контактное действие на  $\mathcal{U}'$  отсутствует). Итак, доказана

**Теорема.** Пусть для большой системы тел  $\mathcal{U}$  существует инерциальная система отсчета  $\phi$ . Тогда для подсистемы тел  $\mathcal{U}'$ , рассматриваемой как самостоятельная большая система, также найдется инерциальная система отсчета  $\phi'$ , универсальная по отношению к любым движениям тел из подсистемы  $\mathcal{U}'$ , тогда и только тогда, когда контактные силы воздействия на тела из  $\mathcal{U}'$  со стороны остальных тел большой системы  $\mathcal{U}$  отсутствуют, а массовые силы этого воздействия характеризуются однородным полем (возможно, зависящим от времени). При этом  $\phi'$  — любая такая система отсчета, которая движется относительно  $\phi$  поступательно с ускорением

центра масс соединенного тела  $\Sigma'$  подсистемы  $\mathcal{U}'$  под действием указанного однородного поля массовых сил.

**4. Заключение.** В теореме установлены условия, необходимые и достаточные для существования системы отсчета  $\phi'$ , инерциальной для системы тел  $\mathcal{U}'$  при всевозможных их движениях и соответствующих (активных в рамках  $\mathcal{U}'$ ) взаимодействиях. При этом движение самой системы отсчета  $\phi'$  относительно старой системы отсчета  $\phi$  (инерциальной для  $\mathcal{U}$ ) является поступательным и определено лишь ускорением, т.е. с точностью до галилеевых преобразований. Это согласуется с результатами работы [7].

В таких условиях находится, например, любая система тел в состоянии свободного падения в однородном поле сил тяжести при любых активных взаимодействиях внутри этой системы (предметы в падающем лифте, в пикирующем самолете); инерциальной для этой системы тел является любая система отсчета  $\phi'$ , движущаяся с ускорением центра масс этой системы тел (с ускорением свободного падения), в том числе система отсчета, непосредственно связанная с центром масс этой системы тел.

Другой пример — Солнечная система и ее подсистема, составленная телами околоземного пространства (Земля, Луна, искусственные спутники). Система отсчета, движущаяся вместе с центром масс Солнечной системы поступательно относительно неподвижных звезд, с достаточной точностью может служить в качестве инерциальной для тел Солнечной системы. Воздействие всех остальных тел Солнечной системы на подсистему тел околоземного пространства сводится к практически однородному полю сил тяготения (в основном от Солнца), изменяющемуся со временем относительно указанной (старой) системы отсчета. Тогда согласно теореме любая система отсчета, движущаяся поступательно относительно старой с ускорением центра масс подсистемы тел околоземного пространства (в частности, связанная с этим центром масс), является инерциальной для подсистемы тел околоземного пространства (при любых их взаимодействиях друг с другом).

В теореме предъявлены точные условия существования инерциальных систем отсчета для подсистем тел в любых движениях. Равенство (22) с привлечением разработанных методов (например, в [7]) может быть проанализировано более детально с точки зрения его выполнения не для всевозможных, а лишь для определенных видов движений тел подсистемы  $\mathcal{U}'$ , что позволит получить условия существования инерциальных для  $\mathcal{U}'$  систем отсчета не в указанном выше универсальном смысле, а лишь для этих видов движений и соответствующих активных взаимодействий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
4. Бровко Г.Л. Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во Попечит. совета мех.-мат. ф-та МГУ. Ч. 1, 2011; Ч. 2, 2013.
5. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017.
6. Аппель П., Дотевилль С. Курс теоретической механики. Одесса: Матезис, 1912.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: УРСС, 2003.

Поступила в редакцию  
20.09.2018

## Краткие сообщения

УДК 519.716.32

КВАЗИУНИВЕРСАЛЬНЫЙ БУЛЕВ АВТОМАТ  
С ЧЕТЫРЬМЯ КОНСТАНТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИЛ. Н. Сысоева<sup>1</sup>

Рассматривается задача о реализации булевых функций инициальными булевыми автоматами с константными состояниями и  $n$  входами, т.е. автоматами, такими, что в любом из состояний функция выхода совпадает с одной из булевых констант 0 или 1, зависящих от  $n$  переменных,  $n \geq 1$ . Построен пример инициального булева автомата с минимальным количеством константных состояний и  $n$  входами, реализующего максимальное возможное число булевых функций от  $n$  фиксированных переменных, при  $n \geq 3$ .

*Ключевые слова:* булева функция, инициальный автомат, реализация булевых функций.

The problem of realization of Boolean functions by initial Boolean automata with constant states and  $n$  inputs is considered. Initial Boolean automaton with constant states and  $n$  inputs is an initial automaton with output such that in all states output functions are  $n$ -ary constant Boolean functions 0 or 1. An example of an initial Boolean automaton with the minimum number of constant states and  $n$  inputs realizing the maximum possible number of  $n$ -ary Boolean functions, where  $n \geq 3$ , is constructed.

*Key words:* Boolean function, initial automaton, realization of Boolean functions.

Перечислим несколько различных постановок, связанных с реализацией булевых функций автоматами и логическими схемами над множествами автоматов. В работе В. А. Кузьмина [1] рассматривается следующий подход: автомат с входным и выходным алфавитами  $\{0, 1\}$  реализует заданную булеву функцию  $f$  от  $n$  переменных, если в моменты времени, кратные  $n$ , значение функции выхода автомата совпадает со значением функции  $f$  на наборе значений переменных, который соответствует определенному отрезку входной последовательности. В работе То Суан Зунга [2] рассматриваются логические схемы над конечными “базисными” множествами автоматов, при этом схема с  $n$  входами и одним выходом реализует заданную булеву функцию  $f$  от  $n$  переменных, если существует такое начальное состояние схемы, что для любой последовательности входных наборов значение функции выхода схемы в каждый момент времени совпадает со значением функции  $f$  на текущем входном наборе (другой вариант — значение функции выхода совпадает со значением  $f$  на входном наборе не в каждый момент времени, а только в некоторые моменты). Похожим образом понятие реализации булевых функций схемами в автоматных базисах вводится в работе В. А. Орлова [3]. Другой подход состоит в том, что наборы, на которых заданная булева функция принимает значение 1, рассматриваются как слова конечного языка, и исследуется автомат, представляющий этот язык (см., например, работу М. А. Кибкало [4]). Отметим, что в перечисленных работах автоматная реализация булевых функций исследуется с точки зрения изучения сложности.

В настоящей работе рассматривается такая постановка, что один инициальный автомат с фиксированным количеством входов  $n$ , выходные функции которого в каждом состоянии являются константами, может реализовать различные булевы функции от  $n$  переменных в зависимости от того, в какой последовательности булевы наборы подаются на его входы. Исследуется вопрос нахождения максимального количества различных булевых функций, которые может реализовать один такой автомат с заданным количеством состояний.

Пусть  $P_2(n)$  — множество всех булевых функций, зависящих от фиксированных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n \geq 1$ . Под булевым автоматом будем понимать автомат  $V = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, Q, F, G)$  с произвольным числом входов, входным алфавитом  $\{0, 1\}$ , выходным алфавитом  $\{0, 1\}$ , алфавитом состояний  $Q$ , функцией перехода  $G$  и функцией выхода  $F$ . Определения автомата и инициального автомата можно найти в [5, 6]. Пусть  $n$  — число входов автомата  $V$ . Без ограничения общности

<sup>1</sup>Сысоева Любовь Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики НИУ “Высшая школа экономики”, e-mail: s-luba@mail.ru.

Sysoeva Lyubov' Nikolaevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, National Research University, Higher School of Economics, Chair of Higher Mathematics.

будем полагать, что входы автомата  $V$  занумерованы от 1 до  $n$  и на  $i$ -й вход автомата  $V$  подается значение булевой переменной  $x_i$ . Тем самым можно считать, что в каждый момент времени на входы автомата  $V$  подается некоторый двоичный набор значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и для любого состояния  $q \in Q$  функция выхода  $F(q, x_1, x_2, \dots, x_n)$  является булевой функцией от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Булев автомат  $V$  будем называть булевым автоматом с константными состояниями, если для любого  $q \in Q$  функция  $F(q, x_1, x_2, \dots, x_n)$  является константной булевой функцией 0 или 1.

Пусть  $V_{q_1} = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, Q, F, G, q_1)$  — инициальный булев автомат с начальным состоянием  $q_1$  и  $n$  входами. Пусть  $C = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2^n})$  — упорядоченная последовательность всех двоичных наборов длины  $n$ ,  $n \geq 1$ . Будем говорить, что автомат  $V_{q_1}$  с последовательностью  $C$  реализует булеву функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если при последовательной подаче на входы автомата  $V_{q_1}$  наборов из  $C$  в каждый момент  $t = 1, 2, \dots, 2^n$  на выходе автомата  $V_{q_1}$  выдается значение  $f(\beta_t)$ . Будем также говорить, что функция  $f$  реализуется автоматом  $V_{q_1}$ , если существует последовательность наборов  $C$ , такая, что автомат  $V_{q_1}$  с последовательностью  $C$  реализует  $f$ . Последовательность  $C$  будем называть последовательностью подаваемых наборов. Обозначим через  $P(V_{q_1})$  множество всех булевых функций, реализуемых автоматом  $V_{q_1}$ .

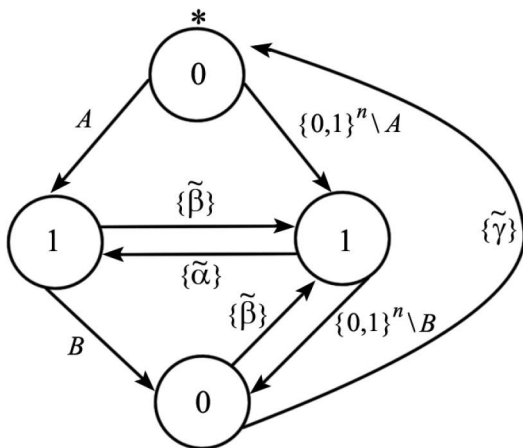
Обозначим через  $\mathcal{W}_k(n)$  множество всех инициальных булевых автоматов с  $k$  константными состояниями и  $n$  входами. Инициальные булевы автоматы из  $\mathcal{W}_k(n)$ , которые реализуют максимальное по мощности множество булевых функций, называются квазиуниверсальными.

Задача об исследовании квазиуниверсальных автоматов была поставлена в работах [7, 8]. Были получены точные оценки максимального числа булевых функций от  $n$  фиксированных переменных, реализуемых автоматами из  $\mathcal{W}_2(n)$  и  $\mathcal{W}_3(n)$ , и описаны все квазиуниверсальные автоматы с двумя и тремя константными состояниями при  $n > 9$ . Было доказано, что число различных булевых функций от  $n$  фиксированных переменных, реализуемых квазиуниверсальным автоматом из множества  $\mathcal{W}_2(n)$ , равно  $\frac{5}{8} \cdot 2^{2^n}$ , а число различных булевых функций от  $n$  фиксированных переменных, реализуемых квазиуниверсальным автоматом из множества  $\mathcal{W}_3(n)$ , равно  $2^{2^n} - 2^n$  при  $n > 9$ . Также было доказано [9], что максимальное число булевых функций, которые можно реализовать одним инициальным булевым автоматом с константными состояниями, не превосходит  $2^{2^n} - 2$ , и был приведен пример квазиуниверсального автомата с  $2^n + 2$  константными состояниями, реализующего все булевы функции от  $n$  фиксированных переменных, кроме констант, при  $n \geq 1$ .

В настоящей работе построен пример квазиуниверсального автомата из множества  $\mathcal{W}_4(n)$ , реализующего  $2^{2^n} - 2$  различных булевых функций от  $n$  фиксированных переменных, при  $n \geq 3$ . Тем самым построен пример инициального булева автомата с минимальным количеством константных состояний, реализующего максимальное возможное число булевых функций от  $n$  фиксированных

переменных, при  $n \geq 3$ .

Пусть  $A$  — множество всех булевых наборов длины  $n$  с первым нулевым элементом;  $B$  — множество всех булевых наборов длины  $n$  со вторым нулевым элементом;  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$  — различные наборы, такие, что  $\tilde{\alpha} \in A, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \{0, 1\}^n \setminus A, \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} \in B, \tilde{\beta} \in \{0, 1\}^n \setminus B$ . Через  $V_4$  обозначим инициальный булев автомат с четырьмя константными состояниями и диаграммой переходов, изображенной на рисунке, где  $A, B, \{\tilde{\alpha}\}, \{\tilde{\beta}\}, \{\tilde{\gamma}\} \subseteq \{0, 1\}^n, n \geq 3$ . В кружочках, обозначающих состояния, указаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, таких, что при их подаче на вход автомата автомат из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Если подается набор, не указанный на диаграмме, то автомат остается в том же состоянии, в котором он находился в предыдущий момент времени. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.



набор, не указанный на диаграмме, то автомат остается в том же состоянии, в котором он находился в предыдущий момент времени. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.

**Теорема 1.** Для любого  $n \geq 3$  инициальный булев автомат  $V_4$  может реализовать любую булеву функцию от  $n$  переменных, отличную от константы.

**Доказательство.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — произвольная функция из  $P_2(n)$ , не являющаяся константой,  $n \geq 3$ . Укажем последовательность  $C$  всех двоичных наборов, такую, что автомат  $V_4$  с последовательностью  $C$  реализует функцию  $f$ . В зависимости от значений, которые функция  $f$  принимает на наборах  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  и  $\tilde{\gamma}$ , возникает восемь случаев.

1) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\gamma}) = 0$ . Тогда существует набор  $\tilde{\delta}$ , такой, что  $f(\tilde{\delta}) = 1$ . Рассмотрим два подслучая.

Пусть  $\tilde{\delta} \in B$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\alpha}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\delta}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0, затем набор  $\tilde{\gamma}$ , набор  $\tilde{\beta}$  и, наконец, все наборы из множества  $B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Пусть теперь  $\tilde{\delta} \in \{0, 1\}^n \setminus B$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\beta}$ , затем все наборы из множества  $B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\delta}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0, затем набор  $\tilde{\gamma}$ , набор  $\tilde{\alpha}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{B \cup \tilde{\delta}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3} - 1$  функций, удовлетворяющих случаю 1.

2) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = 0, f(\tilde{\gamma}) = 1$ . Определим последовательность подаваемых наборов следующим образом: сначала подаем набор  $\tilde{\alpha}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, далее набор  $\tilde{\gamma}$ , потом все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0, затем набор  $\tilde{\beta}$  и, наконец, все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3}$  функций, удовлетворяющих случаю 2.

3) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = 0, f(\tilde{\beta}) = 1, f(\tilde{\gamma}) = 0$ . Рассмотрим два подслучая.

Пусть  $f$  принимает на всех наборах множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$  значение 0. Тогда существует набор  $\tilde{\varepsilon}$  из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (A \cup \{\tilde{\gamma}\})$ , такой, что  $f(\tilde{\varepsilon}) = 0$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\varepsilon}$ , затем все наборы из множества  $B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\beta}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varepsilon}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0, затем набор  $\tilde{\gamma}$ , набор  $\tilde{\alpha}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Пусть теперь существует набор  $\tilde{\delta} \in \{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , такой, что  $f(\tilde{\delta}) = 1$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\alpha}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}, \tilde{\delta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\beta}$ , далее все наборы из множества  $B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\delta}$ , потом все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0 и, наконец, набор  $\tilde{\gamma}$ . Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3}$  функций, удовлетворяющих случаю 3.

4) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = 1, f(\tilde{\beta}) = 0, f(\tilde{\gamma}) = 0$ . Рассмотрим два подслучая.

Пусть  $f$  принимает на всех наборах множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}\}$  значение 0. Тогда существует набор  $\tilde{\varepsilon}$  из множества  $A \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , такой, что  $f(\tilde{\varepsilon}) = 0$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\varepsilon}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\alpha}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varepsilon}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0, затем набор  $\tilde{\gamma}$ , набор  $\tilde{\beta}$  и, наконец, все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Пусть теперь существует набор  $\tilde{\delta} \in B \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , такой, что  $f(\tilde{\delta}) = 1$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\beta}$ , затем все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\delta}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\alpha}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\delta}$ , потом все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0 и, наконец, набор  $\tilde{\gamma}$ . Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3}$  функций, удовлетворяющих случаю 4.

5) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = 0, f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\gamma}) = 1$ . Рассмотрим два подслучая.

Пусть  $f$  принимает на всех наборах множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$  значение 0. Тогда существует набор  $\tilde{\varepsilon}$  из множества  $\{0, 1\}^n \setminus A$ , такой, что  $f(\tilde{\varepsilon}) = 0$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\varepsilon}$ , затем все наборы из множества  $B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\beta}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\varepsilon}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Пусть теперь существует набор  $\tilde{\delta} \in \{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , такой, что  $f(\tilde{\delta}) = 1$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\alpha}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\beta}$ , далее все наборы из множества  $B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\delta}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3}$  функций, удовлетворяющих случаю 5.

6) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = 1, f(\tilde{\beta}) = 0, f(\tilde{\gamma}) = 1$ .

Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\beta}$ , затем все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\alpha}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus B$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\gamma}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\beta}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3}$  функций, удовлетворяющих случаю 6.

7) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = 1, f(\tilde{\gamma}) = 0$ . Рассмотрим два подслучая.

Пусть  $f$  принимает на всех наборах множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$  значение 0. Тогда существуют наборы  $\tilde{\delta} \in A$  и  $\tilde{\varepsilon} \in \{0, 1\}^n \setminus (A \cup \{\tilde{\gamma}\})$ , такие, что  $f(\tilde{\delta}) = f(\tilde{\varepsilon}) = 0$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\delta}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\alpha}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0, затем набор  $\tilde{\gamma}$ , набор  $\tilde{\varepsilon}$ , далее все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1 и, наконец, набор  $\tilde{\beta}$ . Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Пусть теперь существует такой набор  $\tilde{\eta}$  из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , что  $f(\tilde{\eta}) = 1$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\gamma}$ , затем все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\alpha}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}, \tilde{\eta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\beta}$ , набор  $\tilde{\eta}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3}$  функций, удовлетворяющих случаю 7.

8) Пусть  $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\gamma}) = 1$ . Рассмотрим два подслучая.

Пусть  $f$  принимает на всех наборах множества  $A$  значение 1. Тогда существуют наборы  $\tilde{\delta}$  из множества  $\{0, 1\}^n \setminus A$  и  $\tilde{\varepsilon}$  из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , такие, что  $f(\tilde{\delta}) = 0$  и  $f(\tilde{\varepsilon}) = 1$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\delta}$ , затем все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\alpha}$ , далее все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}, \tilde{\varepsilon}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\beta}$ , набор  $\tilde{\varepsilon}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\delta}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Пусть теперь существует набор  $\tilde{\eta} \in A$ , такой, что  $f(\tilde{\eta}) = 0$ . Построим следующую последовательность подаваемых наборов: сначала подаем набор  $\tilde{\eta}$ , затем все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus (B \cup \{\tilde{\beta}\})$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, потом набор  $\tilde{\beta}$ , далее все наборы из множества  $B \setminus \{\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 1, затем набор  $\tilde{\alpha}$ , набор  $\tilde{\gamma}$  и, наконец, все наборы из множества  $\{0, 1\}^n \setminus \{\tilde{\eta}\}$ , на которых функция  $f$  принимает значение 0. Автомат  $V_4$  с такой последовательностью подаваемых наборов реализует функцию  $f$ .

Таким образом, автомат  $V_4$  реализует все  $2^{2^n-3} - 1$  функций, удовлетворяющих случаю 8.

Суммируя из каждого случая количество функций, которые может реализовать автомат  $V_4$ , получаем, что  $V_4$  может реализовать ровно  $2^{2^n} - 2$  различных булевых функций от  $n$  переменных,  $n \geq 3$ . Теорема доказана.  $\square$

Автор выражает искреннюю признательность Р. М. Колпакову за постановку задачи и обсуждение результатов работы и О. С. Дудаковой за ценные советы и замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмин В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. 75–96.
2. То Суан Зунг. Об асимптотических закономерностях сложности автоматов из некоторых классов // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 22. 5–44.
3. Орлов В. А. О сложности реализации ограниченно-детерминированных операторов схемами в автоматных базисах // Проблемы кибернетики. 1973. Вып. 26. 141–182.
4. Кибжало М. А. Автоматная сложность булевых функций из классов Поста: Канд. дис. М., 2013.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2006.
6. Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу “Введение в математическую логику” / Отв. ред. А. Б. Угольников. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.
7. Сысоева Л. Н. Максимальное число булевых функций, реализуемых начальным булевым автоматом с двумя константными состояниями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 4. 12–17.
8. Сысоева Л. Н. Оценки числа булевых функций, реализуемых начальным булевым автоматом с тремя константными состояниями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 2. 19–28.
9. Сысоева Л. Н. Квазиуниверсальные начальные булевы автоматы с константными состояниями // Мат-лы XII Междунар. семинара “Дискретная математика и ее приложения” имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.) / Под общ. ред. О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2016. 229–232.

Поступила в редакцию  
31.10.2018

УДК 517.958:531.332

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КАРЛЕМАНА И ГОДУНОВА–СУЛТАНГАЗИНА

С. А. Духновский<sup>1</sup>

Исследуются одномерные системы уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина для двух и трех групп частиц соответственно. Данные системы являются частным случаем дискретного кинетического уравнения Больцмана. Приводятся теоремы существования глобального решения данных систем для возмущений в весовом пространстве Соболева, откуда следует экспоненциальная стабилизация к состоянию равновесия.

*Ключевые слова:* система Карлемана, система Годунова–Султангазина, теорема существования, асимптотическая устойчивость, число Кнудсена.

One-dimensional systems of Carleman and Godunov–Sultangazin are studied for two and three groups of particles, respectively. These systems are a special case of the discrete Boltzmann kinetic equation. Theorems on existence of global solution to these systems for perturbations in the weighted Sobolev space are presented. Thus, an exponential stabilization to the equilibrium state is obtained.

*Key words:* Carleman system, Godunov–Sultangazin system, existence theorem, asymptotic stability, Knudsen number.

<sup>1</sup> Духновский Сергей Анатольевич — преп. каф. прикладной математики НИУ МГСУ, e-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru.

Dukhnovsky Sergey Anatol'evich — Teacher, Moscow State University of Civil Engineering (MGSU), Department of Applied Mathematics.

**1. Введение.** Рассмотрим системы уравнений Карлемана [1–5]:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= -\frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \quad x \in R, \quad t > 0, \\ \partial_t w - \partial_x w &= \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \\ u|_{t=0} &= u^0, \quad w|_{t=0} = w^0 \end{aligned} \quad (1)$$

и Годунова–Султангазина [1, 6–9]:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), \quad x \in R, \quad t > 0, \\ \partial_t v &= -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw), \\ \partial_t w - \partial_x w &= \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), \\ u|_{t=0} &= u^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad w|_{t=0} = w^0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u = u(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$  — плотности групп частиц,  $0 < \varepsilon < 1$  — число Кнудсена из кинетической теории газа. Исследуем задачу Коши системы (1) для малых возмущений состояния равновесия  $w_e^2 = u_e^2$ ,  $u_e = w_e > 0$ . Аналогично исследуется система Годунова–Султангазина (2) (см. [1, 7, 9]). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{u}, \quad w = w_e + w_e^{1/2} \varepsilon^2 \hat{w}.$$

Тогда

$$\partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2} (\hat{u} + \hat{w})(\hat{u} - \hat{w}), \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\partial_t \hat{w} - \partial_x \hat{w} + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2} (\hat{u} + \hat{w})(\hat{u} - \hat{w}), \quad (4)$$

$$\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}^0, \quad \hat{w}|_{t=0} = \hat{w}^0. \quad (5)$$

Аналогично получают в работах [7, 9] возмущенную систему для Годунова–Султангазина:

$$\partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} (2v_e^{1/2} \hat{v} - u_e^{1/2} \hat{w} - w_e^{1/2} \hat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2} (\hat{v}^2 - \hat{u} \hat{w}), \quad x \in R, \quad t > 0,$$

$$\partial_t \hat{v} + \frac{2}{\varepsilon} v_e^{1/2} (2v_e^{1/2} \hat{v} - u_e^{1/2} \hat{w} - w_e^{1/2} \hat{u}) = -2\varepsilon v_e^{1/2} (\hat{v}^2 - \hat{u} \hat{w}), \quad (6)$$

$$\partial_t \hat{w} - \partial_x \hat{w} - \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} (2v_e^{1/2} \hat{v} - u_e^{1/2} \hat{w} - w_e^{1/2} \hat{u}) = \varepsilon u_e^{1/2} (\hat{v}^2 - \hat{u} \hat{w}),$$

$$\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}^0, \quad \hat{v}|_{t=0} = \hat{v}^0, \quad \hat{w}|_{t=0} = \hat{w}^0. \quad (7)$$

Для периодических возмущений с нулевыми средними

$$\hat{u}(t, x) = u_0(t) + \sum_{k \in Z_0} u_k(t) e^{ikx}, \quad \hat{w}(t, x) = w_0(t) + \sum_{k \in Z_0} w_k(t) e^{ikx}, \quad Z_0 = \{k \in Z, k \neq 0\},$$

введем весовое пространство Соболева  $W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$ :

$$\|\hat{u}\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)} = \left\| \frac{\partial}{\partial t} \hat{u} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)} + \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)},$$

где

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 &= \int_0^\infty e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 dt + \\ &+ \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 dt < \infty, \quad \|\hat{u}|_{t=0}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 = |u_0^0|^2 + \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k^0|^2. \end{aligned}$$

**2. Основные результаты.** Сформулируем основные результаты работы.

**Теорема 1.** Для любых  $u_e = w_e > 0$  существуют не зависящие от  $\varepsilon$  константы  $\mu_1, q \in (0, 1)$ , такие, что для малых  $0 < \varepsilon < 1$  и периодических начальных данных  $(\hat{u}^0, \hat{w}^0)$  с нулевыми средними, для которых выполняется неравенство

$$\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \varepsilon^2 q,$$

для любого  $\sigma > 2$  существует единственное глобальное решение  $(\hat{u}, \hat{w}) \in W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$ , где  $\gamma = \varepsilon \mu_0 > 0, 0 < \mu_0 \leq \frac{(1-\mu_1^2)}{8w_e}$ , задачи Коши (3), (4), (5).

**Теорема 2.** Пусть  $\sigma > 2$  и выполнены условия теоремы 1. Тогда состояние равновесия  $(u_e = \text{const} > 0, w_e = \text{const} > 0, u_e^2 = w_e^2)$  является асимптотически устойчивым:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - u_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(x, t) - w_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0.$$

Аналогично сформулируем теоремы для системы Годунова–Султангазина.

**Теорема 3.** Для любых  $v_e^2 = u_e w_e > 0$  существуют не зависящие от  $\varepsilon$  константы  $\mu_0, q \in (0, 1)$ , такие, что для малых  $0 < \varepsilon < 1$  и периодических начальных данных  $(\hat{u}^0, \hat{v}^0, \hat{w}^0)$  с нулевыми средними, для которых выполняется неравенство

$$\|\hat{u}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{v}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \varepsilon^{3/4} q,$$

для любого  $\sigma > 2$  существует единственное глобальное решение  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$ , где  $\gamma = \varepsilon \mu_0 > 0$ , задачи Коши (6), (7).

**Теорема 4.** Пусть  $\sigma > 2$  и выполнены условия теоремы 3. Тогда состояние равновесия  $(u_e = \text{const} > 0, v_e = \text{const} > 0, w_e = \text{const} > 0, v_e^2 = u_e w_e)$  является асимптотически устойчивым:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - u_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(x, t) - v_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(x, t) - w_e\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0.$$

Автор приносит благодарность В.В. Палину и Е.В. Радкевичу за полезные замечания и важные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи матем. наук. 1971. **26**, № 3. 3–51.
2. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
3. Васильева О.А., Духновский С.А. Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестн. МГСУ. 2015. № 7. 33–40.
4. Духновский С.А. О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. **21**, № 1. 7–41.
5. Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A. Local equilibrium of the Carleman equation // J. Math. Sci. 2015. **207**, N 2. 296–323.
6. Радкевич Е.В. К проблеме несуществования диссипативной оценки для дискретных кинетических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. **30**, № 1. 106–143.
7. Радкевич Е.В. О дискретных кинетических уравнениях // Докл. РАН. 2012. **447**, № 4. 369–373.
8. Васильева О.А. Численное исследование системы уравнений Годунова–Султангазина. Периодический случай // Вестн. МГСУ. 2016. № 4. 27–35.
9. Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A., Radkevich E.V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations // J. Math. Sci. 2018. **235**, N 4. 393–453.

Поступила в редакцию  
19.12.2018

УДК 519.24

## О ЛОКАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ТИПА КОЛМОГОРОВА И ОМЕГА-КВАДРАТ В АВТОРЕГРЕССИИ

М. В. Болдин<sup>1</sup>

Рассматривается  $AR(p)$ -модель с неизвестными параметрами и распределением инноваций. По остаткам от оценок параметров строится подобие эмпирической функции распределения. На этой функции основываются статистики типа Колмогорова и омега-квадрат для проверки гипотез относительно распределения инноваций. Найдена асимптотическая локальная мощность соответствующих тестов.

*Ключевые слова:* авторегрессия, остатки, эмпирическая функция распределения, тесты Колмогорова и омега-квадрат, локальные альтернативы.

A stationary  $AR(p)$  model is considered. The autoregression parameters are unknown as well as the distribution of innovations. Based on the residuals from the parametric estimates, an analog of the empirical distribution function is defined and tests of Kolmogorov's and  $\omega^2$  type are constructed for testing hypotheses on the distribution of innovations. The asymptotic power of these tests under local alternatives is obtained.

*Key words:* autoregression, residuals, empirical distribution function, Kolmogorov's and omega-square tests, local alternatives.

**1. Введение и постановка задачи.** Эмпирическая функция распределения остатков и основанные на ней критерии согласия в линейных и нелинейных регрессионных моделях изучаются давно, имеется обширная библиография. В частности, в [1] рассматривалась стационарная  $AR(p)$ -модель

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где  $\{\varepsilon_t\}$  — независимые, одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с неизвестной функцией распределения (ф.р.)  $G(x)$ ;  $E\varepsilon_1 = 0$ ,  $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$ ;  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$  — вектор неизвестных параметров, таких, что корни соответствующего (1) характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Пусть наблюдения  $u_{1-p}, \dots, u_n$  — выборка из стационарного решения  $\{u_t\}$  уравнения (1), а  $\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_{1n}, \dots, \hat{\beta}_{pn})^T$  — любая  $n^{1/2}$ -состоятельная оценка вектора  $\beta$ , построенная по этим наблюдениям. Например, годится оценка наименьших квадратов (о.н.к.), поскольку она асимптотически нормальна при сделанных предположениях (см., например, [2, гл. 5]). Величины

$$\hat{\varepsilon}_t = u_t - \hat{\beta}_{1n} u_{t-1} - \dots - \hat{\beta}_{pn} u_{t-p}, \quad t = 1, \dots, n,$$

называются остатками, а функция

$$\hat{G}_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^n I(\hat{\varepsilon}_t \leq x), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

называется остаточной эмпирической функцией распределения (о.э.ф.р). Здесь и далее  $I(\cdot)$  означает индикатор события. Функция  $\hat{G}_n(x)$  есть подобие эмпирической функции распределения

$$G_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^n I(\varepsilon_t \leq x)$$

ненаблюдаемых величин  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ .

<sup>1</sup> Болдин Михаил Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: boldin\_m@hotmail.com.

*Boldin Mikhail Vasil'evich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Probability.

В [1] показано: если  $G(x)$  дважды дифференцируема с  $g(x) = G'(x)$  и  $\sup_x |g'(x)| < \infty$ , то

$$\sup_x |n^{1/2}[\hat{G}_n(x) - G_n(x)]| \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty. \tag{2}$$

Утверждение (2) позволяет проверить гипотезу

$$H_0 : G(x) = G_0(x), \quad \text{функция } G_0(x) \text{ полностью известна,}$$

критериями типа Колмогорова–Смирнова и омега-квадрат Крамера–Мизеса–Смирнова (далее кратко — критериями Колмогорова и омега-квадрат). А именно: пусть  $G_0^{-1}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , — обратная к  $G_0(t)$  функция, а

$$\hat{v}_n(t) = n^{1/2}[\hat{G}_n(G_0^{-1}(t)) - t]$$

— остаточный эмпирический процесс (о.э.п.). Это — аналог эмпирического процесса

$$v_n(t) = n^{1/2}[G_n(G_0^{-1}(t)) - t].$$

В силу (2) при  $H_0$

$$\sup_t |\hat{v}_n(t) - v_n(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{3}$$

Из (3) и общеизвестных свойств  $v_n(t)$  (см., например, [3, гл. 3]) получаем, что при  $H_0$  процесс  $\hat{v}_n(t)$  слабо сходится в пространстве Скорохода  $D[0, 1]$  к броуновскому мосту  $v(t)$ :

$$\hat{v}_n(t) \xrightarrow{D} v(t), \quad n \rightarrow \infty. \tag{4}$$

Статистики типа Колмогорова и омега-квадрат для  $H_0$  имеют вид

$$D_n := \sup_t |\hat{v}_n(t)|, \quad \hat{\omega}_n^2 = \int_0^1 [\hat{v}_n(t)]^2 dt.$$

В силу (4) при  $H_0$

$$P(D_n \leq \lambda) \rightarrow P(\sup_t |v(t)| \leq \lambda) = K(\lambda),$$

$$P(\hat{\omega}_n^2 \leq \lambda) \rightarrow P\left(\int_0^1 [v(t)]^2 dt \leq \lambda\right) = S(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $K(\lambda)$  и  $S(\lambda)$  — известные и табулированные функции распределения Колмогорова и Смирнова. Таким образом, статистики  $\hat{D}_n$  и  $\hat{\omega}_n^2$  можно применять для проверки  $H_0$  при больших  $n$  так же, как обычные статистики, основанные на  $v_n(t)$ .

Упомянутые привлекательные факты были установлены только при гипотезе  $H_0$ , поведение о.э.п. и основанных на нем тестовых статистик при локальных альтернативах не рассматривалось. Мы устраним этот пробел.

Цель настоящей работы — установить слабый предел в  $D[0, 1]$  о.э.п.  $\hat{v}_n(t)$  и основанных на нем статистик  $\hat{D}_n$  и  $\hat{\omega}_n^2$  при локальных альтернативах.

Далее в п. 2.2 предполагается, что  $\{\varepsilon_t\}$  в (1) — п.о.р.с.в. с ф.р. в виде смеси

$$A_n(x) := (1 - \rho_n)G_0(x) + \rho_n H(x), \tag{5}$$

где

$$H(x) \text{ — ф.р., } \rho_n = \min\left\{1, \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right\}, \rho \geq 0.$$

Предположение (5) будем понимать как локальную альтернативную к  $H_0$  гипотезу и обозначать  $H_{1n}$ . Разумеется,  $H_{1n}$  и  $H_0$  совпадают при  $\rho = 0$ .

Результат об асимптотическом поведении  $\hat{v}_n(t)$  и основанных на нем статистик  $\hat{D}_n$  и  $\hat{\omega}_n^2$  при  $H_{1n}$  приведен далее в теореме 2. Получить его удалось, доказав аналог соотношения (2) при  $H_{1n}$ . Этот результат представлен далее в теореме 1 и следствии 1 при предположениях относительно ф.р. инноваций существенно более общих, чем (5). Это позволяет рассматривать в дальнейшем

альтернативы более общие, чем  $H_{1n}$ . Если бы  $\{\varepsilon_t\}$  были наблюдаемы, то общий вид локальных к  $H_0$  альтернатив был бы хорошо известен (см. [4]). В схеме (1) мы работаем с остатками и возникает необходимость иметь при альтернативе  $n^{1/2}$ -состоятельную оценку  $\beta$ . В общей ситуации предъявить такую оценку непросто, но для альтернативы (5) такой оценкой оказывается простейшая о.п.к.

В настоящее время соотношения типа (2) (т.е. равномерные стохастические разложения о.э.ф.р.) установлены для различных авторегрессионных моделей: ARMA, взрывающейся и неустойчивой авторегрессии,  $AR(\infty)$ , ARCH, GARCH и для некоторых других (см. [5] и имеющуюся там библиографию). Значит, в этих моделях также можно проверять гипотезы о распределении инноваций тестами типа Колмогорова и омега-квадрат. Локальная мощность этих тестов не исследовалась. Настоящая работа открывает путь к подобному исследованию.

## 2. Основные результаты.

**2.1. Стохастические разложения о.э.ф.р.** Будем предполагать сначала, что с.в.  $\{\varepsilon_t\}$  в (1) — н.о.р.с.в. с ф.р.  $A_n(x)$ . Эта функция распределения не обязательно удовлетворяет (5), к ней предъявляются лишь весьма общие требования. (В них, чтобы подчеркнуть зависимость от  $n$ , будем писать  $\varepsilon_{1n}$  вместо  $\varepsilon_1$ .)

**Условие (i).**  $E\varepsilon_{1n} = 0$ ,  $\sup_n E\varepsilon_{1n}^2 < \infty$ .

**Условие (ii).** Ф.р.  $A_n(x)$  дважды дифференцируема, и  $\sup_{n,x} |A_n^{(2)}(x)| < \infty$ .

Аналогично остаткам  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$  от оценки  $\hat{\beta}_n$  из п. 1 введем остатки от неслучайного вектора  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T \in \mathbb{R}^p$  соотношением

$$\varepsilon_t(\theta) := u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_p u_{t-p}, \quad t = 1, \dots, n.$$

Введем соответствующую о.э.ф.р.:

$$G_n(x, \theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^n I(\varepsilon_t(\theta) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

При  $\theta = \beta$  функция  $G_n(x, \beta)$  совпадает с эмпирической функцией распределения  $G_n(x)$  величин  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ .

Далее  $|\cdot|$  означает евклидову норму вектора.

**Теорема 1.** Пусть  $\{\varepsilon_t\}$  — н.о.р.с.в. с ф.р.  $A_n(x)$ , удовлетворяющей условиям (i), (ii). Тогда при любых  $0 \leq \Theta < \infty$  и  $\delta > 0$

$$P\left(\sup_{x, |\tau| \leq \Theta} |n^{1/2}[G_n(x, \beta + n^{-1/2}\tau) - G_n(x)]| > \delta\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Идея доказательства теоремы 1 родственна идеям доказательства теоремы из [1] и теоремы 2.1 из [5].

Пусть  $\hat{\beta}_n$  — оценка  $\beta$ . Положим  $\hat{G}_n(x) := G_n(x, \hat{\beta}_n)$ . Теорема 1 влечет

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть  $\hat{\beta}_n$  —  $n^{1/2}$ -состоятельная оценка  $\beta$ . Тогда при любом  $\delta > 0$

$$P\left(\sup_x |n^{1/2}[\hat{G}_n(x) - G_n(x)]| > \delta\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство следствия 1 стандартно (см., например, доказательство следствия 2.1 в [5]).

**2.2. О.э.н. и тестовые статистики при локальных альтернативах.** Обратимся теперь к альтернативе  $H_{1n}$  из (5). Будем предполагать выполненными следующие условия.

**Условие (iii).** Случайные величины с функциями распределения  $G_0(x)$  и  $H(x)$  имеют нулевые средние и конечные дисперсии.

**Условие (iv).** Функции распределения  $G_0(x)$  и  $H(x)$  дважды дифференцируемы, их вторые производные ограничены.

При условиях (iii), (iv) ф.р.  $A_n(x)$  из (5) удовлетворяет условиям (i), (ii).

Пусть  $\hat{\beta}_n$  — любая  $n^{1/2}$ -состоятельная при условиях (iii), (iv) оценка  $\beta$ . Например, годится о.н.к., которая при единственном условии (iii) для невырожденной ф.р.  $G_0(x)$  остается асимптотически гауссовской при  $H_{1n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , с теми же параметрами, что и при  $H_0$ . Значит, в силу следствия 1 при  $H_{1n}$  получаем

$$\sup_t |\hat{v}_n(t) - v_n(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Соотношение (6) и известные свойства процесса  $v_n(t)$  при локальных альтернативах (см. [4]) влекут следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (iii), (iv). Пусть

$$\delta(t) := \rho[H(G_0^{-1}(t)) - t], \quad t \in [0, 1],$$

и функция  $\delta(t)$  непрерывна. Тогда при  $H_{1n}$  из (5)

$$\hat{v}_n(t) = n^{1/2}[\hat{G}_n(G_0^{-1}(t)) - t] \xrightarrow{D} v(t) + \delta(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $v(t)$  — броуновский мост.

Из теоремы 2 получаем

**Следствие 2.** В условиях теоремы 2 справедлива сходимость по распределению

$$\hat{D}_n \xrightarrow{d} \sup_t |v(t) + \delta(t)|, \quad \hat{\omega}_n^2 \xrightarrow{d} \int_0^1 [v(t) + \delta(t)]^2 dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М.В. Оценка распределения возмущений в схеме авторегрессии // Теория вероятн. и ее примен. 1982. **27**, № 4. 905–910.
2. Anderson T.V. The statistical analysis of time series. N.Y.: J. Wiley and Sons Inc., 1971.
3. Billingsley P. Convergence of probability measures. N.Y.: J. Wiley and Sons Inc., 1968.
4. Чубисов Д.М. К исследованию асимптотической мощности критериев согласия // Теория вероятн. и ее примен. 1965. **10**, № 3. 460–478.
5. Boldin M.V., Petriev M.N. On the empirical distribution function of residuals in autoregression with outliers and Pearson’s chi-square type tests // Math. Methods Statist. 2018. **27**, N 4. 1–17.

Поступила в редакцию  
13.03.2019

УДК 511

**СОХРАНЕНИЕ СВОЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ  
ТИПА НОРМАЛЬНОСТИ ЗАМКНУТЫМИ map-МОРФИЗМАМИ**

**М. Ю. Лисеев<sup>1</sup>**

Рассматриваются определения нормального, совершенно нормального, коллективно-нормального, наследственно нормального и паранормального отображений и теоремы о сохранении этих свойств замкнутыми map-морфизмами.

*Ключевые слова:* послойная топология, map-морфизм, нормальное отображение, коллективно-нормальное отображение, паранормальное отображение, наследственно нормальное отображение, совершенно нормальное отображение.

The paper contains definitions of normal, perfectly normal, collectionwise normal, hereditarily normal, paranormal mappings, and theorems on how these properties are preserved under closed map-morphisms.

*Key words:* fiberwise topology, map-morphism, normal mapping, collectionwise normal mapping, paranormal mapping, hereditarily normal mapping, perfectly normal mapping.

Под пространством понимается топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение пространств. Далее приводятся определения *отделимости окрестностями* в

<sup>1</sup>Лисеев Михаил Юрьевич — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mathkurs2012@gmail.com.

Liseev Mikhail Yur'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

множестве,  $f$ -отделимости окрестностями, нормального отображения, шар-морфизма, взятые из [1, 2], и замкнутого шар-морфизма.

**Определение 1.** Подмножества  $A, B$  пространства  $X$  называются *отделимыми окрестностями в подмножестве  $X'$  пространства  $X$* , если множества  $A \cap X'$  и  $B \cap X'$  имеют в  $X'$  дизъюнктные окрестности.

**Определение 2.** Для отображения  $f : X \rightarrow Y$  множества  $A, B \subset X$  будем называть  *$f$ -отделимыми окрестностями*, если любая точка  $y \in Y$  обладает окрестностью  $\mathcal{O}y$ , в прообразе  $f^{-1}\mathcal{O}y$  которой множества  $A$  и  $B$  отделимы окрестностями.

**Определение 3.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  *преднормально*, если любые два дизъюнктных замкнутых подмножества  $A$  и  $B$  пространства  $X$  будут  $f$ -отделимы окрестностями. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  *нормально*, если для любой окрестности  $\mathcal{O} \in \tau_Y$  отображение  $f : f^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  преднормально, где  $\tau_Y$  — топология на  $Y$ .

**Определение 4.** Пусть даны два отображения  $f : X \rightarrow Z$  и  $g : Y \rightarrow Z$ . Отображение  $F : X \rightarrow Y$  называется *шар-морфизмом  $F : f \rightarrow g$* , если  $f = g \circ F$  (т.е.  $F(f^{-1}z) \subset g^{-1}z, \forall z \in Z$ ).

**Определение 5.** Шар-морфизм  $F : f \rightarrow g$  отображения  $f : X \rightarrow Z$  на отображение  $g : Y \rightarrow Z$  называется *замкнутым шар-морфизмом*, если отображение  $F : X \rightarrow Y$  замкнуто.

Нам понадобится следующее утверждение (см., например, [3, теорема 1.4.12]).

**Лемма 1.** *Отображение  $f : X \rightarrow Y$  замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого  $B \subset Y$  и каждого открытого множества  $A \subset X$ , содержащего  $f^{-1}(B)$ , существует открытое множество  $C \subset Y$ , содержащее  $B$  и такое, что  $f^{-1}(C) \subset A$ .*

Следующая теорема показывает, что, как и в случае пространств, свойство отображения быть нормальным сохраняется замкнутыми шар-морфизмами.

**Теорема 1.** *Пусть отображение  $f$  пространства  $X$  на пространство  $Z$  нормально,  $g$  — отображение пространства  $Y$  на пространство  $Z$ , а  $F : f \rightarrow g$  — замкнутый шар-морфизм. Тогда отображение  $g$  нормально.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{O} \in \tau_Z$ , подмножества  $Y_1, Y_2 \subset Y$  замкнуты в  $Y$  и дизъюнктны. Поскольку отображение  $F$  непрерывно, то

$$X_1 = F^{-1}Y_1 \text{ и } X_2 = F^{-1}Y_2 \text{ замкнуты в } X \text{ и, кроме того, } X_1 \cap X_2 = \emptyset. \quad (1)$$

Возьмем произвольную точку  $z_0 \in \mathcal{O}$ . Так как отображение  $f$  нормально, то найдутся окрестность  $\mathcal{O}z_0 \subset Z$  и окрестности  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O}z_0)$  множеств  $f^{-1}(\mathcal{O}z_0) \cap X_1$  и  $f^{-1}(\mathcal{O}z_0) \cap X_2$  соответственно, такие, что  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$  (отметим, что множества  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  открыты в  $X$ ).

Из определения шар-морфизма  $F : f \rightarrow g$  следует, что

$$f = g \circ F \Rightarrow f^{-1}\mathcal{O}z_0 = (g \circ F)^{-1}\mathcal{O}z_0 = F^{-1}(g^{-1}\mathcal{O}z_0). \quad (2)$$

Рассмотрим множества  $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  и  $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ . Для них

$$F^{-1}(Y_i \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0) = (F^{-1}Y_i) \cap (F^{-1}g^{-1}\mathcal{O}z_0) = X_i \cap f^{-1}\mathcal{O}z_0 \subset \mathcal{O}_i, i = 1, 2.$$

Действительно, первое равенство очевидно (прообраз пересечения равен пересечению прообразов), второе же следует из (1) и (2).

Поскольку отображение  $F$  замкнуто, то по лемме 1 для множества  $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  и открытого множества  $\mathcal{O}_1$ , которое содержит  $F^{-1}(Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0)$ , найдется открытое в  $Y$  множество  $U_1$ , содержащее  $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  и такое, что  $F^{-1}U_1 \subset \mathcal{O}_1$ . И аналогично для множества  $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  и открытого множества  $\mathcal{O}_2$ , которое содержит  $F^{-1}(Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0)$ , найдется открытое множество  $U_2 \subset Y$ , содержащее  $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  и такое, что  $F^{-1}U_2 \subset \mathcal{O}_2$ .

Из того, что  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ , следует, что  $F^{-1}U_1 \cap F^{-1}U_2 = \emptyset$ . Значит,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Таким образом, для произвольно выбранной точки  $z_0 \in \mathcal{O} \in \tau_Z$  найдена окрестность  $\mathcal{O}z_0 \subset Z$ , такая, что в прообразе  $g^{-1}\mathcal{O}z_0$  этой окрестности множества  $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  и  $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$  отделимы окрестностями  $U_1$  и  $U_2$ , т.е. множества  $Y_1$  и  $Y_2$   $g$ -отделимы окрестностями и отображение  $g$  нормально.  $\square$

Подобно тому, как было определено нормальное отображение, можно определить коллективно-нормальное [2] и паранормальное отображения.

**Определение 6.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  пространства  $X$  на пространство  $Y$  называется *коллективно-преднормальным*, если для любой дискретной системы замкнутых в  $X$  множеств  $\{F_s\}_{s \in S}$  и любого  $y \in Y$  найдется такая окрестность  $\mathcal{O}y \subset Y$  точки  $y$ , что существует дизъюнктная система окрестностей  $\{\mathcal{O}_s : \mathcal{O}_s \subset f^{-1}\mathcal{O}y\}_{s \in S}$  множеств  $\{F_s \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{s \in S}$ , т.е. семейство  $\{F_s\}_{s \in S}$  отделимо

окрестностями в  $f^{-1}\mathcal{O}y$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$  коллективно-нормально, если для любого  $\mathcal{O} \in \tau_Y$  отображение  $f : f^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  коллективно-преднормально.

**Определение 7.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  пространства  $X$  на пространство  $Y$  называется *пред-паранормальным*, если для любых точки  $y \in Y$  и счетной дискретной системы замкнутых в  $X$  множеств  $\{F_n\}_{n < \omega}$  найдется такая окрестность  $\mathcal{O}y \subset Y$  точки  $y$ , что система множеств  $\{F_n \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{n < \omega}$  может быть расширена до локально конечной системы окрестностей  $\{\mathcal{O}_n : \mathcal{O}_n \subset f^{-1}\mathcal{O}y\}_{n < \omega}$ , т.е.  $(F_n \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \subset \mathcal{O}_n$  и  $(F_m \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \cap \mathcal{O}_n \neq \emptyset \Leftrightarrow (F_m \cap f^{-1}\mathcal{O}y) = (F_n \cap f^{-1}\mathcal{O}y)$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$  *паранормально*, если для любого  $\mathcal{O} \in \tau_Y$  отображение  $f : f^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  предпаранормально.

**Замечание.** Определения 6 и 7 являются обобщениями понятий коллективно-нормального и паранормального пространств (в смысле Никоша, см. [4]), убедиться в этом можно, рассмотрев случай, когда множество  $Y$  одноточечное. Очевидно, всякое коллективно-нормальное отображение нормально. Таким образом, коллективная нормальность отображения является более сильным свойством, чем нормальность отображения. Также очевидно, что всякое нормальное отображение является паранормальным.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.

**Теорема 2.** Пусть отображение  $f$  пространства  $X$  на пространство  $Z$  коллективно-нормально (паранормально),  $g$  — отображение пространства  $Y$  на пространство  $Z$ , а  $F : f \rightarrow g$  — замкнутый тар-морфизм. Тогда отображение  $g$  коллективно-нормально (паранормально).

**Определение 8.** Нормальное отображение  $f : X \rightarrow Z$  называется *совершенно нормальным* отображением, если для любого подмножества  $X' \subset X$ , открытого в  $X$ , и каждой точки  $z_0 \in Z$  найдется окрестность  $\mathcal{O}z_0 \subset Z$  этой точки, такая, что множество  $f^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap X'$  имеет тип  $F_\sigma$  в  $X$ .

**Теорема 3.** Пусть отображение  $f : X \rightarrow Z$  совершенно нормально,  $g$  — отображение пространства  $Y$  на пространство  $Z$ , а  $F : f \rightarrow g$  — замкнутый тар-морфизм. Тогда отображение  $g$  совершенно нормально.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное множество  $U \subset Y$ , открытое в  $Y$ . Поскольку отображение  $F$  непрерывно, его прообраз  $F^{-1}U \subset X$  открыт в  $X$ . Но по условию теоремы отображение  $f$  совершенно нормально, значит, для произвольной точки  $z_0 \in Z$  найдется ее окрестность  $\mathcal{O}z_0 \subset Z$ , такая, что

$$f^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap F^{-1}U = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

где  $C_i$  — замкнутые подмножества  $X$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Теперь рассмотрим множество  $g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U \subset Y$ , учитывая предыдущее равенство и то, что  $f^{-1}\mathcal{O}z_0 = F^{-1} \circ g^{-1}\mathcal{O}z_0$ . Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U &= F \circ F^{-1}(g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U) = F(F^{-1}g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap F^{-1}U) = \\ &= F(f^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap F^{-1}U) = F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(C_i), \end{aligned}$$

так как отображение  $F$  замкнуто, подмножества  $F(C_i)$  замкнуты в  $Y$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

То есть для произвольного открытого в  $Y$  множества  $U$  и произвольно выбранной точки  $z_0 \in Z$  нашлась ее окрестность  $\mathcal{O}z_0 \subset Z$ , такая, что множество  $g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U$  имеет тип  $F_\sigma$ , кроме того, из теоремы 1 следует, что отображение  $g$  нормально. Таким образом, заключаем, что отображение  $g$  совершенно нормально.  $\square$

Следующее определение приведено в [1].

**Определение 9.** Ограничение  $f' = f : X' \rightarrow Z$  отображения  $f : X \rightarrow Z$  на подмножество  $X'$  пространства  $X$  будем называть *подотображением* отображения  $f$ .

**Определение 10.** Нормальное отображение  $f : X \rightarrow Z$  называется *наследственно нормальным*, если каждое его подотображение  $f'$  является нормальным отображением.

Нам потребуется следующее утверждение [5, §1].

**Лемма 2.** Если непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  пространства  $X$  в пространство  $Y$  замкнуто, то для любого множества  $B \subset Y$  отображение  $f : f^{-1}B \rightarrow B$  также замкнуто.

Эту лемму можно распространить со случая пространств на случай отображений.

**Лемма 3.** Если непрерывный тар-морфизм  $F : f \rightarrow g$  отображения  $f : X \rightarrow Z$  на отображение  $g : Y \rightarrow Z$  замкнут, то для любого подотображения  $g'$  отображения  $g$  тар-морфизм  $F : F^{-1}g' \rightarrow g'$  тоже замкнут.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное подотображение  $g' = g|_{Y'} : Y' \rightarrow Z$  отображения  $g$ . Рассмотрим замкнутое в  $F^{-1}Y'$  подмножество  $M$ , тогда в  $X$  существует замкнутое множество  $N$ , в

пересечении с  $F^{-1}Y'$  дающее множество  $M$ , т.е.  $M = F^{-1}Y' \cap N$ . Поскольку множество  $N$  замкнуто в  $X$ , а отображение  $F$  замкнуто, получаем, что множество  $F(N)$  замкнуто в  $Y$ . Следовательно, замкнуто в  $Y'$  множество

$$Y' \cap F(N) = F(F^{-1}Y' \cap N) = F(M).$$

Таким образом, получили, что образ  $F(M)$  замкнутого в  $F^{-1}Y'$  множества  $M$  замкнут в  $Y'$ , а это означает, что отображение  $F : F^{-1}Y' \rightarrow Y'$  тоже замкнуто, и, так как  $g' = g|_{Y'} : Y' \rightarrow Z$ , получаем, что пар-морфизм  $F : F^{-1}g' \rightarrow g'$  замкнутый.  $\square$

**Теорема 4.** Пусть отображение  $f : X \rightarrow Z$  наследственно нормально,  $g$  — отображение пространства  $Y$  на пространство  $Z$ , а  $F : f \rightarrow g$  — замкнутый пар-морфизм. Тогда отображение  $g$  наследственно нормально.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное подотображение  $g' = g|_{Y'} : Y' \rightarrow Z$  отображения  $g$ . Тогда прообраз  $F^{-1}Y' \subset X$  дает нам подотображение  $f' : F^{-1}Y' \rightarrow Z$  отображения  $f$ .

По условию теоремы отображение  $f$  наследственно нормально, значит, подотображение  $f'$  нормально. По лемме 3 пар-морфизм  $F : (f' = F^{-1}g') \rightarrow g'$  тоже замкнутый. Тогда поскольку отображение  $f'$  нормально, то по теореме 1 получаем, что и отображение  $g'$  тоже нормально.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. 72–102.
2. Vučković D., Miwa T., Pasynkov B.A. On metrizable type (MT-) maps and spaces // Topol. and its Appl. 1999. 96, N 1. 31–51.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
4. Nyikos P. Problem Section. Problem B. 25 // Topol. Proc. 1984. 9, N 2. 367.
5. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973

Поступила в редакцию  
26.12.2018

УДК 531.382

## ЗАДАЧА МИНИМАКСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНИИ ВИЗИРОВАНИЯ

В. В. Латонов<sup>1</sup>

Приводится решение задачи минимаксной стабилизации линии визирования в окрестности программной траектории. Движение этой линии описывается системой линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. В задаче возмущения представлены в виде отклонений начального положения от нуля, а также в виде постояннодействующих возмущений. Стабилизация осуществляется посредством линейной обратной связи. Коэффициенты обратной связи вычислены как оптимальные при наихудших возможных возмущениях.

*Ключевые слова:* линия визирования, оптимизация, стабилизация, минимаксное управление, матричное уравнение.

The solution of the problem of minimax stabilization of the line of sight in the vicinity of the program trajectory is given. The motion of this line is described by a system of fourth-order linear differential equations. In the problem, perturbations are represented as deviations of the initial position from zero as well as constant perturbations. Stabilization is carried out

<sup>1</sup> Латонов Василий Васильевич — асп. каф. прикладной механики и управления мех-мат. ф-та МГУ, e-mail: WLatonov@gmail.com.

Latonov Vasilii Vasil'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

through linear feedback. The feedback coefficients are calculated as optimal for the worst possible perturbations.

*Key words:* line of sight, optimization, stabilization, minimax control, matrix equation.

**1. Введение.** В работе [1] изложена математическая постановка задачи минимаксной стабилизации линейной системы, где в качестве критерия качества стабилизации выступает функционал Больца; возмущения в системе — это начальные отклонения от нуля. Метод, использованный в работе [1], разобран на примере стабилизации линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. В работе [2] этот метод применяется для построения минимаксной стабилизации системы третьего порядка. В [3] решается задача минимаксной стабилизации в случае невыполнения условий Калмана. В упомянутых работах отклонения начальных условий от нуля играют роль возмущений.

В настоящей работе решена задача минимаксной стабилизации системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. В задаче рассмотрены возмущения начальных условий системы, а также постояннодействующие возмущения. Стабилизация осуществляется посредством линейной обратной связи. Аналитически описано множество, из которого следует выбирать коэффициенты линейной обратной связи, обеспечивающие требуемый запас устойчивости. Для описания этого множества применена теорема Харитоновой [4], из которой определяются условия устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений с параметрами. Приведен пример решения этой задачи при заданных численных параметрах.

**2. Математическая постановка задачи.** Рассматривается система, описанная в работе [5]. Рассматривается подвижное основание, движение которого моделируется машиной Дубинса. Через  $\alpha$  обозначим угол курса основания. Обозначим через  $C$  точку, связанную с основанием. Через  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  обозначим опорную систему отсчета — систему, не совершающую вращательных движений, а через  $Cz_1z_2z_3$  — приборную систему отсчета, жестко связанную с основанием и совершающую поступательные и вращательные движения. Через  $E$  обозначим цель, неподвижную относительно инерциальной системы координат и удаленную от основания на бесконечное расстояние. Сопоставим ей линию визирования — прямую, соединяющую эту точку с точкой  $C$ . Также на основании закреплен цилиндрический объект, обладающий ненулевой массой и моментами инерции. В дальнейшем будем обозначать его координаты индексом  $P$  и называть направляющим цилиндром. Центр масс цилиндра совпадает с точкой  $C$ . Цилиндру также сопоставим линию визирования, совпадающую с его осью симметрии. Каждая из линий визирования задается двумя параметрами — углом курса  $\varphi$  и углом возвышения  $\theta$ . Угол курса отсчитывается от направления оси  $Cz_2$ , угол возвышения — от плоскости  $Cz_1z_2$ .

Рассмотрим задачу оптимизации стабилизации линии визирования цилиндра в окрестности линии визирования цели на заданном временном промежутке. Обозначим через  $t_0$  момент начала движения основания, через  $t_1$  момент окончания движения ( $t_1 = \infty$ ). Тензор инерции  $J_r$  цилиндра в главных осях инерции — диагональный:

$$J_r = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}.$$

Параметры  $(\varphi_P, \theta_P)$  — это углы курса и возвышения цилиндра;  $(\varphi_E, \theta_E)$  — углы курса и возвышения линии визирования цели относительно подвижного основания. Запишем полную систему уравнений, определяющую движение цели и цилиндра в системе координат, связанной с основанием:

$$\begin{cases} (I_1 \cos^2 \theta_P + I_2 \sin^2 \theta_P) \ddot{\varphi}_P = u_{\varphi P} - \nu_\alpha (I_1 \cos^2 \theta_P + I_2 \sin^2 \theta_P) + \dot{\theta}_P (\omega_\alpha + \dot{\varphi}_P) (I_1 - I_2) \sin(2\theta_P), \\ I_1 \ddot{\theta}_P = u_{\theta P} - (\omega_\alpha + \dot{\varphi}_P)^2 (I_1 - I_2) \sin \theta_P \cos \theta_P, \\ \dot{\varphi}_E = -\nu_\alpha, \\ \dot{\omega}_\alpha = \nu_\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Параметры  $\omega_\alpha$  и  $\nu_\alpha$  — это угловая скорость и угловое ускорение подвижного основания при вращении вокруг вертикальной оси;  $u_{\varphi P}$  и  $u_{\theta P}$  — управления, обеспечивающие движение цилиндра.

**3. Минимаксная стабилизация билинейной системы.** Предположим, что основание движется произвольным образом. Будем считать, что программная траектория направляющего цилиндра такова, что он постоянно направлен на точку, совпадающую с целью  $E$ , неподвижную

относительно инерциальной системы координат. Запишем уравнения в вариациях по начальным условиям для цилиндра, управлениям и возмущениям. Программные управления, необходимые для поддержания цилиндра в неподвижном положении, — нулевые моменты  $u_{\varphi P}^* = 0$  и  $u_{\theta P}^* = 0$ . Зададим вектор фазовых координат  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , где  $x_1 = \varphi_P - \varphi_E$ ,  $x_2 = \theta_P - \theta_E$ ,  $x_3 = \dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_E$ ,  $x_4 = \dot{\theta}_P - \dot{\theta}_E$ . Также зададим вектор стабилизирующих управлений  $\delta u = (\delta u_{\varphi P}, \delta u_{\theta P})$ , где  $\delta u_{\varphi P} = u_{\varphi P} - u_{\varphi P}^*$ ,  $\delta u_{\theta P} = u_{\theta P} - u_{\theta P}^*$ . Зададим переменную  $v$  — возмущение по  $\omega_\alpha$  и переменную  $w$  — возмущение по  $\nu_\alpha$ . При линеаризации системы (1) в окрестности программных траекторий не остается слагаемых, содержащих  $v$  и  $w$ . Рассмотрим систему, содержащую билинейные компоненты  $xv$ , отбросив остальные члены второго порядка малости. В матричной форме она имеет вид  $\dot{x} = (A_0 + A_1 v(t))x + B\delta u + B_1 v(t) + B_2 w(t)$ . Будем считать, что  $v(t) \equiv v = \text{const}$  и  $w \equiv 0$ . Ограничим  $v$ :  $|v| \leq \tilde{v}$ . В этом случае компоненты матрицы  $A_0 + A_1 v$  принимают значения из конечного отрезка. Полученная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = (\delta u_{\varphi P} + (I_1 - I_2) \sin 2\theta_E v x_4) / (I_1 \cos^2 \theta_E + I_2 \sin^2 \theta_E), \\ \dot{x}_4 = (\delta u_{\theta P} - (I_1 - I_2) \sin 2\theta_E v x_3) / I_1. \end{cases} \quad (2)$$

Построим стабилизирующее управление следующим образом:  $\delta u_{\varphi P} = k_{1\varphi} x_1 + k_{2\varphi} x_3$  и  $\delta u_{\theta P} = k_{1\theta} x_2 + k_{2\theta} x_4$ . Получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений в виде  $\dot{x} = A(\mathbf{k}, v)x$ , где через  $\mathbf{k}$  обозначается упорядоченная четверка коэффициентов  $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi}, k_{1\theta}, k_{2\theta})$ . Зададим интегральный функционал качества стабилизации:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v) = \int_{t_0}^{\infty} x^T E_4 x dt, \quad (3)$$

где  $E_4$  — единичная матрица размером  $4 \times 4$ . Пусть начальное рассогласование линий визирования принадлежит единичному шару в четырехмерном пространстве, т.е.  $\|x(t_0)\| \leq 1$ . Через  $Q_0$  обозначим выпуклое односвязное компактное множество, из которого могут быть выбраны коэффициенты  $\mathbf{k}$ . Множество  $Q_0$  содержит только те коэффициенты  $\mathbf{k}$ , при которых решение системы (2) асимптотически устойчиво (в противном случае функционал  $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v)$  может не существовать). Поставим задачу: вычислить коэффициенты линейной обратной связи, при которых функционал (3) принимал бы наименьшее значение в случае возмущений, стремящихся его максимизировать:  $\max_{|v| \leq \tilde{v}} \max_{\|x(t_0)\| \leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v) \rightarrow \min_{\mathbf{k} \in Q_0}$ . В настоящей работе рассматривается упрощенная

задача: будем считать, что коэффициенты  $k_{2\varphi}$  и  $k_{2\theta}$  заданы, а минимум будем искать только по коэффициентам  $k_{1\varphi}$  и  $k_{1\theta}$ . Коэффициенты  $k_{2\varphi}$  и  $k_{2\theta}$  определяют линейную зависимость между скоростью углового движения цилиндра и силой вязкого трения, действующего на него. Далее под функцией переменной  $\mathbf{k}$  будем подразумевать функцию параметров  $k_{1\varphi}$  и  $k_{1\theta}$ , а под минимумом по  $\mathbf{k}$  — минимум по  $k_{1\varphi}$  и  $k_{1\theta}$ .

Введем обозначения:  $C = I_1 \cos^2 \theta_E + I_2 \sin^2 \theta_E$ ,  $D = (I_1 - I_2) \sin 2\theta_E$ . Сначала определим множество  $Q_0$ . Наложим дополнительное требование на коэффициенты  $\mathbf{k}$ : они должны обеспечивать запас устойчивости  $\alpha_0$  решению системы (2). Сделаем замену переменных  $x_i = e^{-\alpha_0 t} y_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Характеристический многочлен системы (2) имеет вид

$$P(v, \lambda) = a_0(v) + a_1(v)\lambda + a_2(v)\lambda^2 - \frac{I_1 k_{2\varphi} + C k_{2\theta} + 4C I_1 \alpha_0}{C I_1} \lambda^3 + \lambda^4,$$

где

$$a_0(v) = (k_{1\varphi} k_{1\theta} - (k_{2\varphi} k_{1\theta} + k_{1\varphi} k_{2\theta}) \alpha_0 - (I_1 k_{1\varphi} + C k_{1\theta} - k_{2\varphi} k_{2\theta} - D^2 v^2) \alpha_0^2 + (I_1 k_{2\varphi} + C k_{2\theta}) \alpha_0^3 + C I_1 \alpha_0^4) \frac{1}{C I_1},$$

$$a_1(v) = (k_{2\varphi} k_{1\theta} + k_{1\varphi} k_{2\theta} + (2I_1 k_{1\varphi} + 2C k_{1\theta} - 2k_{2\varphi} k_{2\theta} - 2D^2 v^2) \alpha_0 - 3(I_1 k_{2\varphi} + C k_{2\theta}) \alpha_0^2 - 4C I_1 \alpha_0^3) \frac{1}{C I_1},$$

$$a_2(v) = (k_{2\varphi} k_{2\theta} - I_1 k_{1\varphi} - C k_{1\theta} + D^2 v^2 + 3I_1 k_{2\varphi} \alpha_0 + 3C k_{2\theta} \alpha_0 + 6C I_1 \alpha_0^2) \frac{1}{C I_1}.$$

Только три коэффициента полинома зависят от  $v$  — это  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ . Более того, они зависят только от  $v^2$ , поэтому достаточно получить условия устойчивости при  $v \in [0, \tilde{v}]$ . Рассмотрим четыре полинома, которые получаются из  $P(v, \lambda)$  при следующих наборах коэффициентов, зависящих от  $v$ :

- 1)  $a_0(\tilde{v}), a_1(\tilde{v}), a_2(0)$ ; 2)  $a_0(0), a_1(0), a_2(\tilde{v})$ , 3)  $a_0(\tilde{v}), a_1(0), a_2(0)$ , 4)  $a_0(0), a_1(\tilde{v}), a_2(\tilde{v})$ .

Этим четырем полиномам соответствуют четыре области устойчивости  $Q_i, i = 1, 2, 3, 4$ . Согласно теореме Харитоновна  $Q_0 = \bigcap_{i=1}^4 Q_i$ . Аналитически границы множеств  $Q_i$  задаются при помощи неявных функций. Их представление очень громоздко. Однако у всех четырех множеств часть границы определяется одной и той же гиперболой  $h(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, \alpha_0) = 0$ , где

$$h(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, \alpha_0) = k_{1\varphi}k_{1\theta} - k_{1\varphi}\alpha_0(k_{2\theta} + I_1\alpha_0) - k_{1\theta}\alpha_0(k_{2\varphi} + C\alpha_0) + (k_{2\varphi}k_{2\theta} + D^2\tilde{v}^2)\alpha_0^2 + (I_1k_{2\varphi} + Ck_{2\theta})\alpha_0^3 + I_1C\alpha_0^4.$$

Асимптоты этой гиперболы задаются уравнениями  $k_{1\varphi} = \alpha_0(k_{2\theta} + I_1\alpha_0)$  и  $k_{1\theta} = \alpha_0(k_{2\varphi} + C\alpha_0)$ . Обозначим через  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$  проекцию на плоскость  $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$  множества  $Q_0$ . Она представляет особый интерес, поскольку именно на этой плоскости в дальнейшем будет проводиться поиск минимума.

Для отыскания минимакса требуется найти способ вычисления возмущений, доставляющих максимум функционалу (3) при произвольно взятых коэффициентах  $\mathbf{k}$  и произвольно выбранном  $v$ . Введем обозначение

$$H(\mathbf{k}, v) = \int_{t_0}^{\infty} e^{A^T(\mathbf{k}, v)t} E_4 e^{A(\mathbf{k}, v)t} dt.$$

Тогда интегральный функционал представим в виде терминального функционала:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v) = x^T(t_0)H(\mathbf{k}, v)x(t_0).$$

Матрица  $H(\mathbf{k}, v)$  согласно результатам, приведенным в работе [6], находится из матричного уравнения

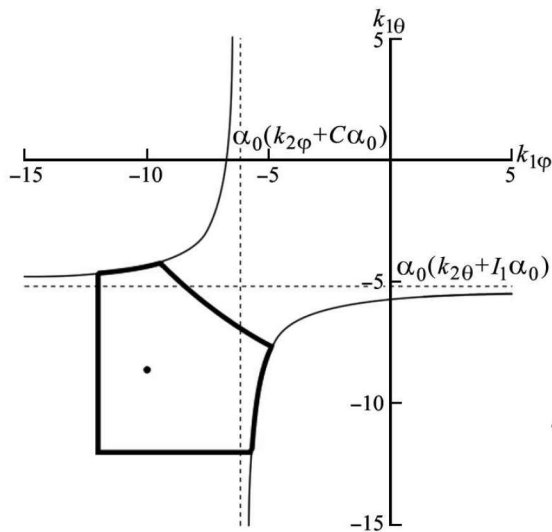
$$A^T(\mathbf{k}, v)H(\mathbf{k}, v) + H(\mathbf{k}, v)A(\mathbf{k}, v) = -E_4,$$

где симметричная матрица  $H(\mathbf{k}, v)$  определена положительно. Максимум по шару  $\|x(t_0)\| \leq 1$  функционала  $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v)$  равен его максимуму по сфере  $\|x(t_0)\| = 1$  при любом фиксированном значении  $v$ , поскольку квадратичная функция  $x^T(t_0)H(\mathbf{k}, v)x(t_0)$  строго выпуклая. Максимум этой функции совпадает с максимальным собственным значением матрицы  $H(\mathbf{k}, v)$ , а аргумент  $x^0(t_0)$ , на котором достигается максимальное значение функции по начальным возмущениям, — это собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению матрицы  $H(\mathbf{k}, v)$ . Через  $\mu_i$  обозначим  $i$ -е собственное значение матрицы. Абсолютный минимум функции  $\max_{\|v\| \leq \tilde{v}} \max_{\|x(t_0)\|=1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v)$  по

переменным  $\mathbf{k}$  на множестве  $Q_0$  может находиться либо внутри множества  $Q_0$ , либо на его границе.

Ограничим все константы неравенствами  $k_{1\varphi} \geq -12, k_{1\theta} \geq -12$ , чтобы множество  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$  было компактным. Матрица  $H(\mathbf{k}, v)$  и ее собственные значения и собственные векторы имеют громоздкое представление в аналитическом виде. Зададим параметры системы для численного моделирования:  $\theta_E = 0.3; I_1 = 2.5; I_2 = 1.5; k_{2\varphi} = -9; k_{2\theta} = -8; \alpha_0 = 0.9; \tilde{v} = 3.5$ . Таким образом, каждая клетка  $h_{ij}$  матрицы  $H(\mathbf{k}, v)$  — это функция  $k_{1\varphi}, k_{1\theta}$  и  $v$ . Точка минимума собственных значений  $H(\mathbf{k}, v)$  может находиться как на границе множества  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ , так и внутри него. Используем концепцию активных индексов, предложенную в работе [1]: введем множество индексов  $J(\mathbf{k}, v)$ , такое, что  $j \in J(\mathbf{k}, v)$ , если  $\mu_j(\mathbf{k}, v) = \max_{1 \leq i \leq 4} \mu_i(\mathbf{k}, v)$ . Все собственные значения этой матрицы — функции  $k_{1\varphi}, k_{1\theta}$  и  $v$ .

Рассмотрим внутренние точки множества  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ . Необходимое условие минимума для внутренних точек записывается в виде уравнений  $\frac{\partial \mu_j(\mathbf{k}^0, v)}{\partial k_{1\varphi}} = \frac{\partial \mu_j(\mathbf{k}^0, v)}{\partial k_{1\theta}} = 0$ . Для граничных точек множества  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$  условия минимума определяются иначе [1]. Если в граничной точке  $\mathbf{k}^0$  достигается локальный минимум функции  $\mu_j(\mathbf{k}, v)$  на множестве  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ , то существуют  $\nu_j \geq 0, j \in J(\mathbf{k}, v)$ , и вектор  $a \in K^*$ , такие, что  $\sum_{j \in J(\mathbf{k}, v)} \nu_j + a \neq 0$  и  $\sum_{j \in J(\mathbf{k}, v)} \nu_j \frac{\partial \mu_j(\mathbf{k}^0, v)}{\partial \mathbf{k}} + a^T = 0$ , где  $K^*(\mathbf{k}^0)$  — двойственный конус, построенный в граничной точке  $\mathbf{k}^0$ . Определение двойственного конуса приведено в работе [7].



Множество  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0^2)$  и точка минимума  
 $(k_{1\varphi} = -9.97701, k_{1\theta} = -8.60929)$

на рисунке изображены ветви гиперболы  $h(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, \alpha_0) = 0$ , образующие часть границы множества  $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ , асимптоты этой гиперболы. Точка  $k_{2\varphi} = -9, k_{2\theta} = -8$ , выбранная для численного моделирования, удовлетворяет критерию Гурвица.

**4. Выводы.** Приведено решение задачи минимаксной стабилизации линии визирования направляющего цилиндра на подвижном основании. Цель задачи — вычисление коэффициентов обратной связи, обеспечивающих оптимальную стабилизацию в смысле квадратичного функционала при наихудших начальных и постояннодействующих возмущениях. Приведено аналитическое описание множества, из которого выбираются коэффициенты обратной связи. Множество построено с применением теоремы Харитоновой. Для заданных параметров численно найдены коэффициенты обратной связи.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 18-00-01590.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alexandrov V.V., Bugrov D.I., Corona M.G., Tikhonova K.V. Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing // IMA J. Math. Control and Inform. 2017. **34**, N 1. 15–25.
2. Александрова О.В., Козик А.А. Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного поля // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. 45–49.
3. Александров В.В., Рамирез Гутierrez Х.А. Алгоритм минимаксной стабилизации линейных систем третьего порядка // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 2. 47–52.
4. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. **14**, № 4. 2086–2088.
5. Латонов В.В., Тихомиров В.В. Управление линией визирования цели по видеоизображению // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 1. 53–59.
6. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
7. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи матем. наук. 1975. **30**, вып. 3(183). 3–55.

Поступила в редакцию  
15.01.2019

Соотношением  $\frac{\partial \mu_j(\mathbf{k}, v^0)}{\partial v} = 0$  определяется необходимое условие максимума на внутренней точке отрезка  $[-\tilde{v}, \tilde{v}]$ . Максимум по  $v$  также может достигаться в одной из точек  $\pm \tilde{v}$ , поэтому значения функции  $\mu_j(\mathbf{k}, v)$  проверяются и в этих точках.

Воспользуемся указанными условиями и вычислим минимум по  $\mathbf{k}$  среди всех максимумов по  $v$  от  $\mu_j(\mathbf{k}, v)$ . Численный эксперимент показал, что при заданных параметрах минимакс достигается в точке  $(k_{1\varphi}^0 = -9.97701, k_{1\theta}^0 = -8.60929)$  при значении  $v^0 = \pm 3.5$ . Наихудшее начальное возмущение достигается в двух точках, симметричных относительно начала координат:

$$x^0(t_0) = (0.101173, 0.983958, -0.0169072, 0.145961),$$

$$x^0(t_0) = (-0.101173, -0.983958, 0.0169072, -0.145961).$$

На рисунке жирными линиями показана проекция  $Q_0$  на плоскость  $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$  и точка  $\mathbf{k}^0$ . Также на

**Указатель статей и материалов, опубликованных в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика” в 2019 году**

<i>Математика</i>	№	С.
<i>Аксенов А. В.</i> Асимптотика интеграла от функции погранслоного типа . . . . .	5	58
<i>Арушанян О. В., Залеткин С. Ф.</i> Об одном аналитическом методе приближенного решения канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	3	65
<i>Бабин Д. П.</i> Разрешимость задачи полноты автоматного базиса в зависимости от его булевой части . . . . .	1	52
<i>Баранова И. С.</i> Асимптотические свойства коэффициентов орторекурсивных разложений по характеристическим функциям двоичных промежутков . . . . .	5	3
<i>Беднов Б. Б.</i> О множестве точек Штейнера четырех элементов в пространстве Линденштраусса . . . . .	6	3
<i>Болдин М. В.</i> О локальной мощности критериев типа Колмогорова и омега-квадрат в авторегрессии . . . . .	6	58
<i>Быков В. В.</i> К задаче Миллионщикова о бэровском классе центральных показателей диффеоморфизмов . . . . .	5	17
<i>Ведерников И. К.</i> О верхней оценке степени частичного прогнозирования общерегулярных сверхсобытий . . . . .	5	10
<i>Ветохин А. П.</i> Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра . . . . .	3	69
<i>Владыкина В. Е.</i> Асимптотика фундаментальных решений уравнения Штурма–Лиувилля по спектральному параметру . . . . .	1	57
<i>Владыкина В. Е.</i> Спектральные характеристики оператора Штурма–Лиувилля при минимальных условиях на гладкость коэффициентов . . . . .	6	23
<i>Воронов С. М.</i> О некоторых признаках сходимости рядов Фурье по системе Виленкина в случае неограниченных $p_k$ . . . . .	5	42
<i>Гашков С. Б., Гашков И. В., Фролов А. Б.</i> О сложности решения уравнений малой степени в кольце целых чисел и кольцах вычетов . . . . .	1	7
<i>Герасимова О. В., Размыслов Ю. П.</i> О важности притяжения (о реинкарнации третьего закона Кеплера) . . . . .	4	15
<i>Голубков А. А.</i> Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой . . . . .	2	37
<i>Джангибеков Г., Одинабеков Д. М., Худжаназарова Г. Х.</i> Об условиях нётеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области . . . . .	2	9
<i>Дудакова О. С.</i> Построение бесконечного семейства классов частичных монотонных функций многозначной логики . . . . .	1	3
<i>Духновский С. А.</i> Об асимптотической устойчивости состояний равновесия для систем уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина . . . . .	6	55
<i>Жуков К. А., Корнев А. А., Ложников М. А., Попов А. В.</i> Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа . . . . .	2	14
<i>Ищенко Р. А.</i> О разметке графов дефинитных автоматов . . . . .	5	44
<i>Козловская Т. Д.</i> Об объединении $U_r$ -множеств для системы характеров группы целых $p$ -адических чисел . . . . .	4	42
<i>Кокучикин В. И.</i> Существование правильной системы, у которой верхнепредельные центральные и генеральные показатели не совпадают с нижнепредельными . . . . .	2	53
<i>Коновалов А. Ю.</i> Абсолютная $L$ -реализуемость и интуиционистская логика . . . . .	2	50
<i>Коновалов А. Ю.</i> Обобщенная реализуемость для расширений языка арифметики . . . . .	4	50
<i>Кочергин В. В.</i> Простое доказательство верхней оценки сложности вычисления трех одночленов трех переменных . . . . .	2	3
<i>Крылова Г. А.</i> Оценка параметра больших уклонений для одноканальной системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком . . . . .	4	9
<i>Латышев В. Н.</i> Замечание о кодировании в алгебрах со строгой фильтрацией . . . . .	1	15
<i>Лисеев М. Ю.</i> Сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми шар-морфизмами . . . . .	6	61
<i>Макаров А. В., Макаров В. В.</i> Континуальность числа замкнутых надклассов некоторых минимальных классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_2^3$ . . . . .	4	57
<i>Мамон С. В.</i> Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на группе Гейзенберга и интеграл Виенера . . . . .	6	8
<i>Науменко А. П.</i> О приближении действительных чисел суммами двух квадратов простых чисел . . . . .	5	51
<i>Никонов И. М.</i> Описание вырожденных двумерных особенностей с одной критической точкой . . . . .	3	5
<i>Павлов А. В.</i> О перестановочности косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье . . . . .	2	46
<i>Петрухин Я. И.</i> Теорема о нормализации выводов для логики Сетте и ее модификаций . . . . .	1	26
<i>Попков К. А.</i> Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе . . . . .	4	54

<i>Потапов М. К., Симонов Б. В.</i> Усиленные неравенства Уэльянова для частных модулей гладкости функций из пространств с различными смешанными метриками . . . . .	3	26
<i>Редькин П. П.</i> О диагностических тестах для контактных схем . . . . .	2	35
<i>Семенова Т. Ю.</i> Асимптотика интегралов Фейнмана в одномерном случае . . . . .	4	46
<i>Сергеев И. П.</i> О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости . . . . .	1	21
<i>Сергеев И. П.</i> О приводимости линейных дифференциальных систем к линейным дифференциальным уравнениям . . . . .	3	39
<i>Стаи А. Х.</i> Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы . . . . .	5	48
<i>Сысоева Л. П.</i> Квазиуниверсальный булев автомат с четырьмя константными состояниями . . . . .	6	51
<i>Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В.</i> Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности . . . . .	3	15
<i>Фоменко Т. П.</i> Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах . . . . .	6	14
<i>Цветников Р. А.</i> Линейная связность сферы в пространстве Громова–Хаусдорфа . . . . .	2	42
<i>Чубариков В. П.</i> Об одной теореме о среднем . . . . .	1	54
<i>Шафаревич А. А.</i> Геометрическое описание орбит группы автоморфизмов аффинного торического многообразия . . . . .	5	55
<i>Яшунский А. Д.</i> Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой . . . . .	4	3
<i>К юбилею Виктора Антоновича Садовниченко.</i> . . . . .	3	3
<i>Тарас Павлович Лукашенко (к семидесятилетию со дня рождения).</i> . . . . .	2	70
<i>Памяти Николая Михайловича Коробова</i> . . . . .	1	69

### Механика

<i>Александрова О. В., Козик А. А.</i> Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного полета . . . . .	3	45
<i>Аркания З. М., Мардалешивили Н. В.</i> Расчет абсолютно гибких стержней, нагруженных сосредоточенными силами в потоке воздуха или жидкости . . . . .	4	58
<i>Белоглазкин А. Н., Шкадов В. Я., Кулаго А. Е.</i> Предельные волновые режимы при пространственном и временном развитии возмущений в стекающей пленке жидкости . . . . .	3	58
<i>Беляев А. П.</i> Исследование влияния способа укладки слоев различных типов плетения на защитные свойства многослойной тканевой преграды . . . . .	1	61
<i>Бровко Г. Л.</i> О подходах к моделированию свойств материалов усложненной структуры . . . . .	1	41
<i>Бровко Г. Л.</i> Об инерциальных системах отсчета для подсистем деформируемых тел . . . . .	6	44
<i>Георгиевский Д. В.</i> Изолированные устойчивые начальные возмущения неустойчивых равновесий некоторых механических систем . . . . .	3	49
<i>Голубятников А. П., Украинский Д. В.</i> Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики . . . . .	2	63
<i>Ермолаев И. К., Чулков А. А.</i> Численный эксперимент для случая ускорения тела вращения . . . . .	2	60
<i>Ждан Т. И.</i> Действия подвижных нагрузок на балки Вернулли–Эйлера и Тимошенко . . . . .	5	61
<i>Завойчинская Э. Б.</i> О теории усталостного разрушения при сложном напряженном состоянии металлов с учетом структурных изменений . . . . .	2	29
<i>Звягин А. В., Панфилов Д. П., Шамина А. А.</i> Взаимное влияние дискообразных трещин в трехмерном упругом пространстве . . . . .	4	34
<b>Зезин Ю. П.</b> , <i>Тышин П. В.</i> Методика экспериментальной оценки длительной прочности полимерных материалов по результатам испытаний кольцевых образцов . . . . .	2	22
<i>Карапетян А. В., Чаплыгина М. П.</i> Бифуркационный анализ динамики гироскопа в кардановом подвесе . . . . .	3	72
<i>Карапетян А. В.</i> О движении шайбы на вращающейся горизонтальной плоскости . . . . .	5	37
<i>Карликов В. П., Нечаев А. Т., Толоконников С. Л.</i> О фонтанировании вертикальных затопленных осесимметричных струй в относительно узких каналах . . . . .	3	54
<i>Квачев К. В.</i> Об эквивалентности классической постановке одной возможной постановки задачи теории упругости в напряжениях . . . . .	4	62
<i>Ким А. С., Шпади Ю. Р.</i> Математическое моделирование процессов в напряженной среде при внезапном возникновении разрыва . . . . .	5	31
<i>Красинский А. Я., Ильина А. П., Красинская Э. М.</i> Об одном случае стабилизации стационарных движений систем с избыточными координатами . . . . .	1	46
<i>Латонов В. В.</i> Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования . . . . .	6	64
<i>Нечаев А. Т.</i> Об эжектировании жидкости из сосуда плоской пристенной струей . . . . .	2	67

<i>Никабадзе М. У.</i> К расщеплению начально-краевых задач в анизотропной линейной теории упругости . . . . .	5	23
<i>Прошкин В. А.</i> Об одном экстремальном свойстве орбит в Солнечной системе . . . . .	3	75
<i>Романова Д. И., Душин В. Р., Никитин В. Ф.</i> Вытеснение нефти смесью газов и воды с тепловыделением	6	38
<i>Садовничий В. А., Александров В. В., Александрова О. В., Вега Р., Коноваленко И. С., Сото Э., Тихонова К. В., Гордильо-Домингес Х. Л., Гонзалес О.</i> О гальванической коррекции вестибулярной активности пилота при визуальном управлении полетом . . . . .	1	34
<i>Тарыгин И. Е.</i> К задаче калибровки инерциальных датчиков при изменяющейся температуре . . . . .	1	64
<i>Тихонова К. В.</i> Задача гарантированного тестирования на конечном интервале времени . . . . .	5	69
<i>Хозлов А. В.</i> Оценка влияния начальной стадии деформирования на свойства кривых релаксации, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругих материалов . . . . .	4	28
<i>Чикаренко В. Г.</i> К вопросу размещения волнодвижителей на судне . . . . .	2	58
<i>Шамолин М. В.</i> Интегрируемые системы со многими степенями свободы с диссипацией . . . . .	6	29
<i>Янков Я. Д.</i> Теория идеальных дисперсных систем . . . . .	5	65

## ПРАВИЛА

### подготовки рукописей, представляемых для опубликования в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика”

Журнал печатает статьи по всем разделам математики и механики. Журнал открыт для публикации научных исследований ученых Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, других научных учреждений и высших учебных заведений.

Объем статьи (включая таблицы и список литературы) ограничен тремя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти; б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех; в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух. К статьям объемом 7–12 страниц предъявляются повышенные требования; очередность их опубликования определяется отдельно. В статьях объемом до 6 страниц предполагается четкое представление основных результатов без излишних деталей выводов и доказательств. Статьи объемом до 4 страниц печатаются в разделе “Краткие сообщения” вне очереди.

Принимаются статьи, набранные на компьютере в формате LATEX версии 2.09 (см. правила оформления электронной версии по следующему адресу: <http://vestnik.math.msu.su/>). Рукопись представляется в редакцию на русском языке в двух экземплярах на листах формата А4 с полями 2 см слева и справа, 4 см сверху и снизу. Необходимо также представить в редакцию CD-диск с файлом статьи.

Чертежи, рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах.

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указания на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) — фамилия и инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей — фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя).

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

В левом верхнем углу первого листа рукописи проставляется УДК. Ниже указываются название статьи, еще ниже — инициалы и фамилии авторов. Далее помещаются резюме на русском языке, ключевые слова на русском языке, резюме на английском языке, ключевые слова на английском языке. Резюме объемом до 7 строк не должно содержать ссылки на разделы, иллюстрации, номера цитируемой литературы, формулы и рисунки. Кроме того, прилагается библиографическое описание статьи (фамилии, инициалы авторов, название статьи) на английском языке.

Сокращения слов, имен, названий не допускаются, за исключением общепринятых сокращений математических величин и терминов, мер физических и химических величин.

Нумерация теорем, лемм, утверждений и формул (справа) производится в порядке возрастания номеров на протяжении всей статьи без пропусков и повторений. Нумеруются только те формулы, на которые есть ссылки.

Текст статьи должен быть подписан всеми авторами “в печать”. Отдельно нужно указать фамилии, имена, отчества всех авторов, ученую степень, ученое звание, место работы, должность, полный почтовый адрес, номер телефона (служебный и домашний) и e-mail каждого соавтора; авторский коллектив должен указать также лицо, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

Автору предоставляется корректура статьи. Никакие изменения верстки, за исключением исправления опечаток и восстановления пропущенного при наборе, не допускаются. Выправленную и подписанную корректуру следует в течение двух дней после получения вернуть в редакцию.

Обращаем внимание авторов на то, что, направляя свою статью в журнал, они тем самым дают согласие на обнародование ее путем издания на русском языке в данном журнале и согласие на обнародование, перевод и издание статьи на английском языке американским издательством “Аллертон Пресс” (<http://www.allertonpress.com>), которому предоставлено исключительное право перевода, издания и распространения англоязычной версии журнала и его статей по всему миру.

Электронные версии статей на английском языке можно найти по адресу: <http://www.springerlink.com>.

За англоязычное издание статей авторам выплачивается гонорар. Для получения гонорара авторам следует обращаться в Российское авторское общество (РАО) по адресу: 123995, Москва, ГСП-5, ул. Б. Бронная, 6А, РАО, Отдел валютных расчетов. Тел.: 8 (495) 697-33-35.

При несоблюдении автором вышеприведенных правил редакция журнала оставляет за собой право задержать публикацию статьи или отклонить рукопись без ее рассмотрения по существу.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Рукописи принимаются по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, комн. 13-25. Тел.: 8 (495) 939-51-27, e-mail: [msu-vestmm@mail.ru](mailto:msu-vestmm@mail.ru).

Рукописи, присланные по почте, а также по электронной почте, к рассмотрению не принимаются и не возвращаются.

**УЧРЕДИТЕЛИ:**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;  
механико-математический факультет МГУ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**В. Н. ЧУБАРИКОВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор; главный редактор  
**А. Т. ФОМЕНКО** – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор; зам. главного редактора  
**В. В. АЛЕКСАНДРОВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор; зам. главного редактора  
**А. А. ШКАЛИКОВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор; зам. главного редактора  
**Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ** – доктор физ.-мат. наук, профессор; ответственный секретарь

**В. П. КАРЛИКОВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор  
**Б. С. КАШИН** – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**Г. М. КОБЕЛЬКОВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор  
**В. В. КОЗЛОВ** – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**В. Н. ЛАТЫШЕВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор  
**Т. П. ЛУКАШЕНКО** – доктор физ.-мат. наук, профессор  
**А. С. МИЩЕНКО** – доктор физ.-мат. наук, профессор  
**Ю. В. НЕСТЕРЕНКО** – член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**Р. И. НИГМАТУЛИН** – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**В. А. САДОВНИЧИЙ** – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**И. Н. СЕРГЕЕВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор  
**А. И. ШАФАРЕВИЧ** – член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**А. Н. ШИРЯЕВ** – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор  
**В. Я. ШКАДОВ** – доктор физ.-мат. наук, профессор

**Редактор Н. А. ЛЕОНТЬЕВА**

**Журнал зарегистрирован в Министерстве печати и информации РФ.  
Свидетельство о регистрации № 1546 от 14 февраля 1991 г.**

**Адрес редакции:**

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1.  
e-mail: msu-vestmm@mail.ru

**По вопросам подписки и приобретения отдельных номеров журналов  
“Moscow University Mathematics Bulletin” и “Moscow University Mechanics Bulletin”  
обращаться по адресу:**

Allerton Press Inc.  
250 West 57<sup>th</sup> Street, New York, USA, NY 10107.  
Fax: 646-424-96-95

Подписано в печать 13.11.2019.  
Бумага офсетная. Формат 60×90/8.  
Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 7,92.  
Тираж 110 экз. Изд. № 11183. Заказ №

---

Издательство Московского университета.  
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15 (ул. Академика Хохлова, 11).  
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com  
Отдел реализации. Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com  
Сайт Издательства МГУ: <http://msupress.com>  
Отпечатано в типографии ООО «Паблит». 127282, Москва, ул. Поляная, д. 31В, стр. 1.  
Тел.: (495) 230-20-52



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

---